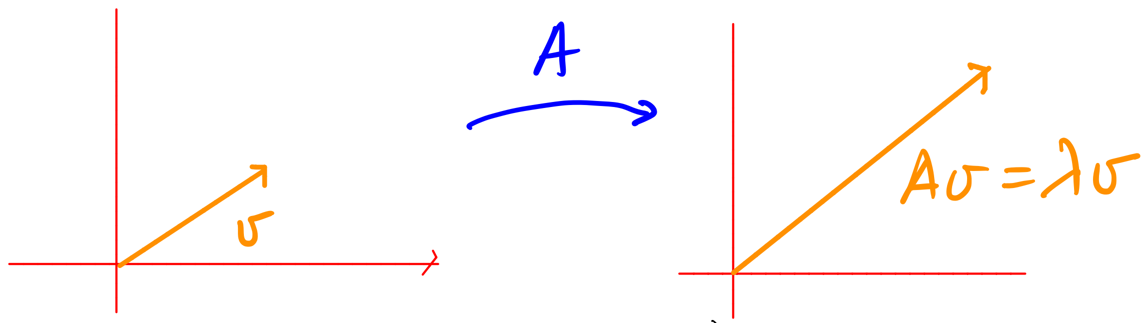
Valores y Vectores propios.

Dada una matriz $A \in M_{n\times n}$, decimos que el vector $v \in \mathbb{R}^n$ es un vector propio de A si $Av = \lambda v$; es decir, si la imagen de v bajo A (vista como transformación lineal) es un múltiplo escalar de v.



Consideremos la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ y los vectores

Tomemos $\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$. ¿Son vectores propios de A?

1) <u>Calculemos $A\bar{v}_1$</u>:

$$A\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-30 \\ 30-10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 \\ 20 \end{pmatrix}$$

$$= -4\begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix} = -4\bar{v}_1$$

Como $A\bar{v}_1 = -4\bar{v}_1$, entonces $\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix}$ sí es un vector propio de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

2) <u>Calculemos $A\bar{v}_2$</u>:

$$A\bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-12 \\ 15-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 11 \end{pmatrix}$$

observemos que $A\bar{v}_2 = \begin{pmatrix} -9 \\ 11 \end{pmatrix}$ <u>no</u> es múltiplo escalar del vector $\bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$. Por tanto, este vector $\bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ no es un vector propio de la matriz A.

Si $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$ es un vector propio de A; es decir, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $A\bar{v} = \lambda \bar{v}$, diremos que el escalar λ es el valor propio asociado al vector propio $\bar{v}$.

En el ejemplo anterior, el vector
$$\bar{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix}$$
es un vector propio de A, pues
$$A\bar{v} = -4\bar{v}$$
por tanto $\lambda = -4$ es el valor propio de A asociado al vector propio $\bar{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix}$.

¿Cómo obtener o calcular vectores propios de una matriz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$? Observemos que

$$A\bar{v} = \lambda\bar{v}$$
$$\Updownarrow$$
$$A\bar{v} - \lambda\bar{v} = \bar{0}$$
$$\Updownarrow$$
$$A\bar{v} - \lambda I\bar{v} = \bar{0}$$
$$\Updownarrow$$
$$(A - \lambda I)\bar{v} = 0$$

Es decir, $\bar{v}$ es vector propio de A si y sólo si es solución del sistema de ecuaciones homogeneo
$$(A - \lambda I)\bar{v} = 0$$

Pero sabemos que un sistema homogeneo de ecuaciones

El sistema homogeneo de ecuaciones $B\bar{v}=\bar{0}$, $B\in M_{n\times n}$ tiene solución distinta de la trivial si y sólo si

$$\det B=0$$

Usando este resultado tenemos que el sistema homogéneo

$$(A-\lambda I)\bar{v}=\bar{0}$$

tiene solución no trivial $(\bar{v}\neq\bar{0})$ si y sólo si

$$\det(A-\lambda I)=0.$$

Veamos un ejemplo para entender el significado de esta última igualdad.

Tomemos $A=\begin{pmatrix}1&6\\5&2\end{pmatrix}$:

$\bar{v}$ es vector propio si y sol si $(A-\lambda I)\bar{v}=\bar{0}$ tiene solución $\bar{v}\neq\bar{0}$. Pero esto ocurre si y sólo si

$$\det(A-\lambda I)=0$$

Es decir, si

$$0=\det(A-\lambda I)=\det\left(\begin{pmatrix}1&6\\5&2\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$$

$$=\det\begin{pmatrix}1-\lambda&6\\5&2-\lambda\end{pmatrix}=(1-\lambda)(2-\lambda)-30$$

$$=(\lambda-1)(\lambda-2)-30=\lambda^2-3\lambda+2-30$$

$$=\lambda^2-3\lambda-28=(\lambda-7)(\lambda+4)$$

En resumen, para que $\bar{v} \in \mathbb{R}^2$ sea vector propio de A, requerimos que $\bar{v}$ $(\neq \bar{0})$ sea solución del sistema homogéneo $(A - \lambda I)\bar{v} = \bar{0}$

Pero este sistema tiene soluciones no triviales sólo cuando

$$\det(A - \lambda I) = (\lambda - 7)(\lambda + 4) = 0$$

Es decir

i) Si $\lambda = 7$ entonces el sistema

$$\bar{0} = (A - \lambda I)(\bar{v})$$
$$= (A - 7I)\bar{v}$$

tiene solución no trivial. Hallemos tal solución: a) Primero calculemos $A - 7I$

$$A - 7I = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} - 7\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -6 & 6 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}$$

b) Ahora determinemos $\bar{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \neq \bar{0}$ tal que

$$(A - 7I)v = \bar{0}$$

es decir

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 6 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6v_1 + 6v_2 \\ 5v_1 - 5v_2 \end{pmatrix}$$

Para resolver este sistema de ecuaciones homogéneas, usemos Gauss-Jordan:

$$\begin{pmatrix} -6 & 6 \\ 5 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

entonces $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_1 + v_2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \quad -v_1 + v_2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{v_1 = v_2}$$

De esta forma el vector $\bar{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \neq \bar{0}$ es vector propio si

$$v_1 = v_2$$

Tomemos $v_1 = 1$, de esta forma $v_2 = 1$

$\therefore$ $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ es un vector propio de A

y su valor propio asociado es $\lambda = 7$

Ahora tomemos $\lambda = -4$: Para determinar el vector propio $\bar{v} \neq 0$ que sea solución de

$$(A - \lambda I)\bar{v} = \bar{0} \quad \text{con } \lambda = -4.$$

como $\lambda = -4$

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} - (-4)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Así $\bar{0} = (A - \lambda I)\bar{v}$ es equivalente a tomar $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ y resolver

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0$$

Usando nuevamente eliminación de Gauss, tenemos

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

es decir $\quad 5v_1 + 6v_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad v_2 = -\frac{5}{6} v_1$

Si $v_1 = 6$, entonces $v_2 = -5$. Así $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix}$ es vector propio de A.

Ejercicios: Calcular vectores y valores propios de las matrices

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Respuestas: $\lambda_1 = 1$, $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = 3$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_3 = -2$, $v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$; Respuesta: $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -4$

encuentra sus vectores propios asociados

c) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Respuestas $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Dada una matriz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, se define su radio espectral como

$$\rho(A) = \max\{\,|\lambda| \mid \lambda \text{ es valor propio de } A\}$$

Ejemplo: Para la matriz

$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, sus valores propios son

$\lambda_1 = 7$, $\lambda_2 = -4$

$$\Rightarrow \rho(A) = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\} = \max\{|7|, |-4|\} = 7$$

$$\therefore \rho(A) = 7$$

Ejercicio: Calcula los radios espectrales de los ejercicios (a), (b) y (c) de dos páginas atrás.