Problemas numericos
odes.

1. Aplique el método de Euler para aproximar las soluciones de los siguientes problemas de valor inicial.

a. $y' = te^{3t} - 2y, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad y(0) = 0, \quad$ con $h = 0.5$

b. $y' = 1 + (t - y)^2, \quad 2 \leq t \leq 3, \quad y(2) = 1, \quad$ con $h = 0.5$

c. $y' = 1 + y/t, \quad 1 \leq t \leq 2, \quad y(1) = 2, \quad$ con $h = 0.25$

d. $y' = \cos 2t + \operatorname{sen} 3t, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad y(0) = 1, \quad$ con $h = 0.25$

2. A continuación se dan las soluciones reales de los problemas de valor inicial del ejercicio 1. En cada paso, compare el error real con la cota de error.

a. $y(t) = \frac{1}{5}te^{3t} - \frac{1}{25}e^{3t} + \frac{1}{25}e^{-2t}$ **b.** $y(t) = t + \frac{1}{1-t}$

c. $y(t) = t \ln t + 2t$ **d.** $y(t) = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t - \frac{1}{3}\cos 3t + \frac{4}{3}$

3. Aplique el método de Euler para aproximar las soluciones de los siguientes problemas de valor inicial.

a. $y' = y/t - (y/t)^2, \quad 1 \leq t \leq 2, \quad y(1) = 1, \quad$ con $h = 0.1$

b. $y' = 1 + y/t + (y/t)^2, \quad 1 \leq t \leq 3, \quad y(1) = 0, \quad$ con $h = 0.2$

c. $y' = -(y + 1)(y + 3), \quad 0 \leq t \leq 2, \quad y(0) = -2, \quad$ con $h = 0.2$

d. $y' = -5y + 5t^2 + 2t, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad y(0) = \frac{1}{3}, \quad$ con $h = 0.1$

4. A continuación se dan las soluciones reales a los problemas de valor inicial del ejercicio 3. Calcule el error en las aproximaciones del ejercicio 3.

a. $y(t) = \frac{t}{1 + \ln t}$ **b.** $y(t) = t \tan(\ln t)$

c. $y(t) = -3 + \frac{2}{1 + e^{-2t}}$ **d.** $y(t) = t^2 + \frac{1}{3}e^{-5t}$

5. Dado el problema de valor inicial

$$y' = \frac{2}{t}y + t^2e^t, \quad 1 \leq t \leq 2, \quad y(1) = 0,$$

con las soluciones exactas $y(t) = t^2(e^t - e)$:

a. Use el método de Euler con $h = 0.1$ para aproximar la solución y compararla con los valores reales de y.

b. Use las respuestas obtenidas en la parte (a) y la interpolación lineal para aproximar los siguientes valores de y y compárelos con los valores reales.

i. $y(1.04)$ **ii.** $y(1.55)$ **iii.** $y(1.97)$

c. Por medio de la ecuación (5.10), calcule el valor de h necesario para que $|y(t_i) - w_i| \leq 0.1$.

6. Dado el problema de valor inicial

$$y' = \frac{1}{t^2} - \frac{y}{t} - y^2, \quad 1 \leq t \leq 2, \quad y(1) = -1,$$

con la solución exacta $y(t) = -1/t$:

a. Use el método de Euler con $h = 0.05$ para aproximar la solución y compárela con los valores reales de y.

b. Use las respuestas obtenidas en el inciso (a) y la interpolación lineal para aproximar los siguientes valores de y y compárelos con los valores reales.

i. $y(1.052)$ **ii.** $y(1.555)$ **iii.** $y(1.978)$

c. Use la ecuación (5.10) para calcular el valor de h necesario para que $|y(t_i) - w_i| \leq 0.05$.

7. Dado el problema de valor inicial

$$y' = -y + t + 1, \quad 0 \leq t \leq 5, \quad y(0) = 1$$

con la solución exacta $y(t) = e^{-t} + t$:

a. Aproxime $y(5)$ aplicando el método de Euler, con $h = 0.2$, $h = 0.1$ y $h = 0.05$.

b. Determine el valor óptimo de h que debe usarse al calcular $y(5)$, suponiendo que $\delta = 10^{-6}$ y que la ecuación (5.14) es válida.

8. Use los resultados del ejercicio 3 y la interpolación lineal para aproximar los siguientes valores de $y(t)$. Compare las aproximaciones obtenidas con los valores reales obtenidos por medio de las funciones del ejercicio 4.

a. $y(1.25)$ y $y(1.93)$

b. $y(2.1)$ y $y(2.75)$

c. $y(1.4)$ y $y(1.93)$

c. $y(0.54)$ y $y(0.94)$

9. Sea $E(h) = \dfrac{hM}{2} + \dfrac{\delta}{h}$.

a. En el problema de valor inicial

$$y' = -y + 1, \qquad 0 \le t \le 1, \qquad y(0) = 0,$$

calcule el valor de h con el que $E(h)$ se reduce al mínimo. Suponga que $\delta = 5 \times 10^{-(n+1)}$, si está empleando la aritmética de n dígitos en el inciso (c).

b. Para el h óptimo calculado en el inciso (a) determine, con la ecuación (5.13), el error mínimo obtenible.

c. Compare el error real obtenido al utilizar $h = 0.1$ y $h = 0.01$ con el error mínimo del inciso (b). ¿Puede explicar los resultados?

10. Considere el problema de valor inicial

$$y' = -10y, \qquad 0 \le t \le 2, \qquad y(0) = 1.$$

que tiene la solución $y(t) = e^{-10t}$. ¿Qué sucede cuando aplicamos el método de Euler a este problema, con $h = 0.1$? ¿Viola este comportamiento el teorema 5.9?

11. En un libro titulado *Looking at History Through Mathematics*, Rashevsky [Ra, pp. 103-110], se propone un modelo de un problema referente a la aparición de no conformistas de la sociedad. Suponga que una sociedad tiene una población de $x(t)$ individuos en el tiempo t, en años, y que todos los no conformistas que tienen relaciones sexuales con otros no conformistas engendran hijos que también son no conformistas, mientras que una proporción fija r del resto de los hijos también son no conformistas. Si supone que las tasas de natalidad y mortalidad de todos los individuos son las constantes b y d, respectivamente, y si los conformistas y no conformistas tienen relaciones sexuales al azar, el problema se puede expresar mediante las ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx(t)}{dt} = (b-d)x(t) \quad \text{y} \quad \frac{dx_n(t)}{dt} = (b-d)x_n(t) + rb(x(t) - x_n(t)),$$

donde $x_n(t)$ denota la cantidad de no conformistas de la población en el tiempo t.

a. Si introducimos la variable $p(t) = x_n(t)/x(t)$ para representar la proporción de no conformistas de la sociedad en el tiempo t, demuestre que estas ecuaciones pueden combinarse y simplificarse en la ecuación diferencial individual

$$\frac{dp(t)}{dt} = rb(1 - p(t)).$$

b. Suponiendo que $p(0) = 0.01$, $b = 0.02$, $d = 0.015$ y $r = 0.1$, aproxime la solución $p(t)$ de $t = 0$ a $t = 50$ cuando el tamaño de paso es $h = 1$ año.

c. Resuelva la ecuación diferencial para $p(t)$ exactamente, y compare su resultado del inciso (b) cuando $t = 50$ con el valor exacto en ese tiempo.

12. En un circuito de voltaje impreso $\mathcal{E}$ que tiene la resistencia R, la inductancia L y la capacitancia C en paralelo, la corriente i satisface la ecuación diferencial

$$\frac{di}{dt} = C\frac{d^2\mathcal{E}}{dt^2} + \frac{1}{R}\frac{d\mathcal{E}}{dt} + \frac{1}{L}\mathcal{E}.$$

Supongamos que $C = 0.3$ faradios, $R = 1.4$ ohms, $L = 1.7$ henrios y que el voltaje está dado por

$$\mathcal{E}(t) = e^{-0.06\pi t}\,\mathrm{sen}(2t - \pi).$$

Si $i(0) = 0$, calcule la corriente i con los valores $t = 0.1\,j$, donde $j = 0, 1, \ldots, 100$.

En muchos de los problemas siguientes será útil una calculadora o computadora. También será conveniente que el lector escriba un programa para resolver problemas con valores iniciales mediante el método de Euler. (Recuerde que todos los cálculos trigonométricos se hacen en radianes).

En los problemas 1 a 4, utilice el método de Euler para aproximar la solución del problema con valor inicial dado, en los puntos $x = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ *y* 0.5 *usando un tamaño del paso* 0.1 ($h = 0.1$).

1. $dy/dx = x/y\,, \qquad y(0) = -1\,.$

2. $dy/dx = -x/y\,, \qquad y(0) = 4\,.$

3. $dy/dx = y(2 - y)\,, \qquad y(0) = 3\,.$

4. $dy/dx = x + y\,, \qquad y(0) = 1\,.$

5. Utilice el método de Euler con tamaño del paso $h = 0.2$ para aproximar la solución del problema con valor inicial

$$y' = \frac{1}{x}(y^2 + y)\,, \qquad y(1) = 1$$

en los puntos $x = 1.2, 1.4, 1.6$ y 1.8.

6. Utilice el método de Euler con tamaño del paso $h = 0.1$ para aproximar la solución del problema con valor inicial

$$y' = x - y^2\,, \qquad y(1) = 0$$

en los puntos $x = 1.1, 1.2, 1.3, 1.4$ y 1.5.

7. Utilice el método de Euler para aproximar la solución del problema con valor inicial

$$\frac{dx}{dt} = 1 + t\,\mathrm{sen}(tx)\,, \qquad x(0) = 0$$

en $t = 1$, usando 1, 2, 4 y 8 pasos.

8. Utilice el método de Euler para aproximar la solución del problema con valor inicial

$$y' = 1 - \mathrm{sen}\, y\,, \qquad y(0) = 0$$

en $x = \pi$, usando 1, 2, 4 y 8 pasos.

9. Utilice el método de Euler con $h = 0.1$ para aproximar la solución del problema con valor inicial

$$y' = \frac{1}{x^2} - \frac{y}{x} - y^2\,, \qquad y(1) = -1$$

en el intervalo $1 \le x \le 2$. Compare estas aproximaciones con la solución real $y = -1/x$ (¡verifique!)

graficando la aproximación poligonal y la solución real en el mismo sistema de coordenadas.

10. Utilice el método de Euler con $h = 0.1$ para aproximar la solución del problema con valor inicial

$$y' = x - y \ , \qquad y(0) = 0$$

en el intervalo $0 \leq x \leq 1$. Compare estas aproximaciones con la solución real $y = e^{-x} + x - 1$ (¡verifique!) graficando la aproximación poligonal y la solución real en el mismo sistema de coordenadas.

11. Utilice el método de Euler con 20 pasos para aproximar la solución del problema con valor inicial

$$\frac{dx}{dt} = 1 + x^2 \ , \qquad x(0) = 0$$

en $t = 1$. Compare la aproximación con la solución real $x = \tan t$ (¡verifique!) evaluada en $t = 1$.

12. En el ejemplo 2 se aproxima el número trascendente e usando el método de Euler para resolver el problema con valor inicial

$$y' = y \ , \qquad y(0) = 1 \ .$$

Muestre que la aproximación de Euler y_n obtenemos mediante el tamaño del paso $1/n$ está dada por la fórmula

$$y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \ , \qquad n = 1, 2, \ldots \ .$$

Recuerde de sus cursos de cálculo que

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \ ,$$

por lo que el método de Euler converge (teóricamente) al valor correcto.

13. Demuestre que la "razón de convergencia" del método de Euler en el problema 12 es comparable con $1/n$, mostrando que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e - y_n}{1/n} = \frac{e}{2} \ .$$

[*Sugerencia*: Use la regla de l'Hôpital y el desarrollo de Maclaurin para $\ln(1 + t)$].

14. Use el método de Euler con $h = 0.5, 0.1, 0.05$ y 0.01 para aproximar la solución del problema con valor inicial

$$y' = 2xy^2 \ , \qquad y(0) = 1$$

en el intervalo $0 \leq x \leq 2$. (La explicación del errático resultado aparece en el problema 18 de los ejercicios 1.2).

Intercambio de calor. *En esencia, hay dos mecanismos mediante los que un cuerpo físico intercambia calor con su ambiente. La transferencia de calor* **por contacto** *a través de la superficie del cuerpo es controlada por la diferencia entre las temperaturas del cuerpo y del ambiente; esto se conoce como la ley de enfriamiento de Newton. Sin embargo, la transferencia de calor también se debe a la* **radiación térmica**, *que de acuerdo con la ley de radiación de Stefan es controlada por la diferencia entre las cuartas potencias de estas temperaturas. En la mayor parte de los casos, uno de estos modos domina al otro. Los problemas 15 y 16 invitan al lector a simular cada modo de manera numérica para un conjunto dado de condiciones iniciales.*

15. Ley de enfriamiento de Newton. La ley de enfriamiento de Newton establece que la razón de cambio en la temperatura $T(t)$ de un cuerpo es proporcional a la diferencia entre la temperatura del medio $M(t)$ y la temperatura del cuerpo. Es decir,

$$\frac{dT}{dt} = K[M(t) - T(t)] \ ,$$

donde K es una constante. Sea $K = 1$ (minutos)$^{-1}$ y consideremos constante a la temperatura del medio, $M(t) \equiv 70°$F. Si el cuerpo tiene una temperatura inicial de 100°F, utilice el método de Euler con $h = 0.1$ para aproximar la temperatura del cuerpo después de

(a) 1 minuto.
(b) 2 minutos.

16. Ley de radiación de Stefan. La ley de radiación de Stefan establece que la razón de cambio en la temperatura de un cuerpo a $T(t)$ grados en un medio a $M(t)$ grados es proporcional a $M^4 - T^4$; es decir,

$$\frac{dT}{dt} = K(M(t)^4 - T(t)^4) \ ,$$

donde K es una constante. Sea $K = (40)^{-4}$ y supongamos que la temperatura del medio es constante, $M(t) \equiv 70°$F. Si $T(0) = 100°$F, utilice el método de Euler con $h = 0.1$ para aproximar $T(1)$ y $T(2)$.

PROBLEMS

25.1 Solve the following initial value problem over the interval from $t = 0$ to 2 where $y(0) = 1$. Display all your results on the same graph.

$$\frac{dy}{dt} = yt^2 - 1.1y$$

(a) Analytically.
(b) Euler's method with $h = 0.5$ and 0.25.
(c) Midpoint method with $h = 0.5$.
(d) Fourth-order RK method with $h = 0.5$.

25.2 Solve the following problem over the interval from $x = 0$ to 1 using a step size of 0.25 where $y(0) = 1$. Display all your results on the same graph.

$$\frac{dy}{dt} = (1 + 4t)\sqrt{y}$$

(a) Analytically.
(b) Euler's method.
(c) Heun's method without iteration.
(d) Ralston's method.
(e) Fourth-order RK method.

25.3 Use the **(a)** Euler and **(b)** Heun (without iteration) methods to solve

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 0.5t + y = 0$$

where $y(0) = 2$ and $y'(0) = 0$. Solve from $x = 0$ to 4 using $h = 0.1$. Compare the methods by plotting the solutions.

25.4 Solve the following problem with the fourth-order RK method:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 0.6\frac{dy}{dx} + 8y = 0$$

where $y(0) = 4$ and $y'(0) = 0$. Solve from $x = 0$ to 5 with $h = 0.5$. Plot your results.

25.5 Solve from $t = 0$ to 3 with $h = 0.1$ using **(a)** Heun (without corrector) and **(b)** Ralston's second-order RK method:

$$\frac{dy}{dt} = y\sin^3(t) \qquad y(0) = 1$$

25.6 Solve the following problem numerically from $t = 0$ to 3:

$$\frac{dy}{dt} = -2y + t^2 \qquad y(0) = 1$$

Use the third-order RK method with a step size of 0.5.

25.7 Use **(a)** Euler's and **(b)** the fourth-order RK method to solve

$$\frac{dy}{dt} = -2y + 5e^{-t}$$

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{yz^2}{2}$$

over the range $t = 0$ to 0.4 using a step size of 0.1 with $y(0) = 2$ and $z(0) = 4$.

25.8 Compute the first step of Example 25.14 using the adaptive fourth-order RK method with $h = 0.5$. Verify whether step-size adjustment is in order.

25.9 If $\varepsilon = 0.001$, determine whether step size adjustment is required for Example 25.12.

25.10 Use the RK-Fehlberg approach to perform the same calculation as in Example 25.12 from $x = 0$ to 1 with $h = 1$.

25.11 Write a computer program based on Fig. 25.7. Among other things, place documentation statements throughout the program to identify what each section is intended to accomplish.

25.12 Test the program you developed in Prob. 25.11 by duplicating the computations from Examples 25.1 and 25.4.

25.13 Develop a user-friendly program for the Heun method with an iterative corrector. Test the program by duplicating the results in Table 25.2.

25.14 Develop a user-friendly computer program for the classical fourth-order RK method. Test the program by duplicating Example 25.7.

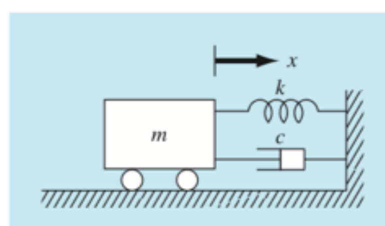
25.15 Develop a user-friendly computer program for systems of equations using the fourth-order RK method. Use this program to duplicate the computation in Example 25.10.

25.16 The motion of a damped spring-mass system (Fig. P25.16) is described by the following ordinary differential equation:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

where x = displacement from equilibrium position (m), t = time (s), m = 20-kg mass, and c = the damping coefficient (N · s/m). The damping coefficient c takes on three values of 5 (underdamped), 40 (critically damped), and 200 (overdamped). The spring constant k = 20 N/m. The initial velocity is zero, and the initial displacement x = 1 m. Solve this equation using a numerical method over the time period $0 \le t \le 15$ s. Plot the displacement versus time for each of the three values of the damping coefficient on the same curve.

FIGURE P25.16



25.17 If water is drained from a vertical cylindrical tank by opening a valve at the base, the water will flow fast when the tank is full and slow down as it continues to drain. As it turns out, the rate at which the water level drops is:

$$\frac{dy}{dt} = -k\sqrt{y}$$

where k is a constant depending on the shape of the hole and the cross-sectional area of the tank and drain hole. The depth of the water y is measured in meters and the time t in minutes. If $k = 0.06$, determine how long it takes the tank to drain if the fluid level is initially 3 m. Solve by applying Euler's equation and writing a computer program or using Excel. Use a step of 0.5 minutes.

25.18 The following is an initial value, second-order differential equation:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + (5x)\frac{dx}{dt} + (x + 7)\sin(\omega t) = 0$$

where

$$\frac{dx}{dt}(0) = 1.5 \quad \text{and} \quad x(0) = 6$$

Note that $\omega = 1$. Decompose the equation into two first-order differential equations. After the decomposition, solve the system from $t = 0$ to 15 and plot the results.

25.19 Assuming that drag is proportional to the square of velocity, we can model the velocity of a falling object like a parachutist with the following differential equation:

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{c_d}{m}v^2$$

where v is velocity (m/s), t = time (s), g is the acceleration due to gravity (9.81 m/s^2), c_d = a second-order drag coefficient (kg/m), and m = mass (kg). Solve for the velocity and distance fallen by a 90-kg object with a drag coefficient of 0.225 kg/m. If the initial height is 1 km, determine when it hits the ground. Obtain your solution with **(a)** Euler's method and **(b)** the fourth-order RK method.

25.20 A spherical tank has a circular orifice in its bottom through which the liquid flows out (Fig. P25.20). The flow rate through the hole can be estimated as

$$Q_{\text{out}} = CA\sqrt{2gH}$$

where Q_{out} = outflow (m^3/s), C = an empirically-derived coefficient, A = the area of the orifice (m^2), g = the gravitational constant (= 9.81 m/s^2), and H = the depth of liquid in the tank. Use one of the numerical methods described in this chapter to determine how long it will take for the water to flow out of a 3-m-diameter tank with an initial height of 2.75 m. Note that the orifice has a diameter of 3 cm and $C = 0.55$.

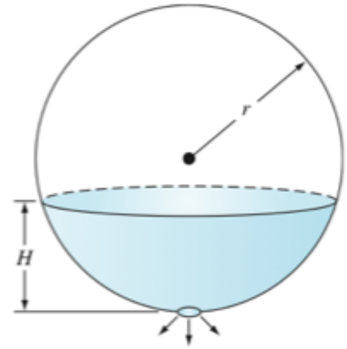


FIGURE P25.20
A spherical tank.

25.21 The logistic model is used to simulate population as in

$$\frac{dp}{dt} = k_{gm}(1 - p/p_{\max})p$$

where p = population, k_{gm} = the maximum growth rate under unlimited conditions, and $p_{\max}$ = the carrying capacity. Simulate the world's population from 1950 to 2000 using one of the numerical methods described in this chapter. Employ the following initial conditions and parameter values for your simulation: p_0 (in 1950) = 2555 million people, k_{gm} = 0.026/yr, and $p_{\max}$ = 12,000 million people. Have the function generate output corresponding to the dates for the following measured population data. Develop a plot of your simulation along with these data.

t	1950	1960	1970	1980	1990	2000
p	2555	3040	3708	4454	5276	6079

25.22 Suppose that a projectile is launched upward from the earth's surface. Assume that the only force acting on the object is the downward force of gravity. Under these conditions, a force balance can be used to derive,

$$\frac{dv}{dt} = -g(0)\frac{R^2}{(R + x)^2}$$

where v = upward velocity (m/s), t = time (s), x = altitude (m) measured upwards from the earth's surface, $g(0)$ = the gravitational acceleration at the earth's surface ($\cong$ 9.81 m/s^2), and R = the earth's radius ($\cong 6.37 \times 10^6$ m). Recognizing that $dx/dt = v$, use Euler's method to determine the maximum height that would be obtained if $v(t = 0)$ = 1500 m/s.

25.23 The following function exhibits both flat and steep regions over a relatively short x region:

$$f(x) = \frac{1}{(x - 0.3)^2 + 0.01} + \frac{1}{(x - 0.9)^2 + 0.04} - 6$$

Determine the value of the definite integral of this function between $x = 0$ and 1 using an adaptive RK method.

25.24 Given the initial conditions, $y(0) = 1$ and $y'(0) = 0$, solve the following initial-value problem from $t = 0$ to 4:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 4y = 0$$

Obtain your solutions with (a) Euler's method and (b) the fourth-order RK method. In both cases, use a step size of 0.125. Plot both solutions on the same graph along with the exact solution $y = \cos 2t$.

25.25 Use the following differential equations to compute the velocity and position of a soccer ball that is kicked straight up in the air with an initial velocity of 40 m/s:

$$\frac{dy}{dt} = v$$

$$\frac{dv}{dt} = -g - \frac{c_d}{m} v|v|$$

where y = upward distance (m), t = time (s), v = upward velocity (m/s), g = gravitational constant (= 9.81 m/s^2), c_d = drag coefficient (kg/m), and m = mass (kg). Note that the drag coefficient is related to more fundamental parameters by

$$c_d = \frac{1}{2}\rho A C_d$$

where ρ = air density (kg/m^3), A = area (m^2), and C_d = the dimensionless drag coefficient. Use the following parameter values for your calculation: $d = 22$ cm, $m = 0.4$ kg, $\rho = 1.3$ kg/m^3, and $C_d = 0.52$.

25.26 Three linked bungee jumpers are depicted in Fig. P25.26. If the bungee cords are idealized as linear springs (i.e., governed by Hooke's law), the following differential equations based on force balances can be developed

$$m_1\frac{d^2x_1}{dt^2} = m_1g + k_2(x_2 - x_1) - k_1x_1$$

$$m_2\frac{d^2x_2}{dt^2} = m_2g + k_3(x_3 - x_2) + k_2(x_1 - x_2)$$

$$m_3\frac{d^2x_3}{dt^2} = m_3g + k_3(x_2 - x_3)$$

where m_i = the mass of jumper i (kg), k_j = the spring constant for cord j (N/m), x_i = the displacement of jumper i measured downward from its equilibrium position (m), and g = gravitational acceleration (9.81 m/s^2). Solve these equations for the positions and velocities of the three jumpers given the initial conditions that all positions and velocities are zero at $t = 0$. Use the following parameters for your calculations: $m_1 = 60$ kg, $m_2 = 70$ kg, $m_3 = 80$ kg, $k_1 = k_3 = 50$, and $k_2 = 100$ (N/m).

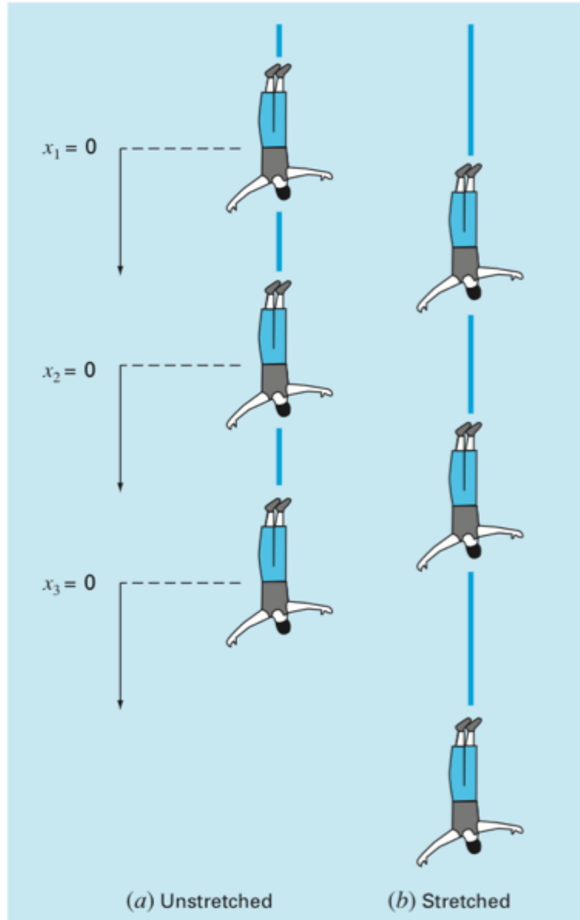


FIGURE P25.26
Three individuals connected by bungee cords.

EJERCICIOS 6.1

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-13.

Dados los problemas de valor inicial presentados en los ejercicios del 1 al 10, use el método mejorado de Euler para obtener una aproximación al valor indicado con cuatro decimales. Primero utilice $h = 0.1$ y después $h = 0.05$.

1. $y' = 2x - 3y + 1,\ y(1) = 5;\ y(1.5)$
2. $y' = 4x - 2y,\ y(0) = 2;\ y(0.5)$
3. $y' = 1 + y^2,\ y(0) = 0;\ y(0.5)$
4. $y' = x^2 + y^2,\ y(0) = 1;\ y(0.5)$
5. $y' = e^{-y},\ y(0) = 0;\ y(0.5)$
6. $y' = x + y^2,\ y(0) = 0;\ y(0.5)$
7. $y' = (x - y)^2,\ y(0) = 0.5;\ y(0.5)$
8. $y' = xy + \sqrt{y},\ y(0) = 1;\ y(0.5)$
9. $y' = xy^2 - \dfrac{y}{x},\ y(1) = 1;\ y(1.5)$
10. $y' = y - y^2,\ y(0) = 0.5;\ y(0.5)$
11. Considere el problema de valor inicial $y' = (x + y - 1)^2$, $y(0) = 2$. Utilice el método mejorado de Euler con $h = 0.1$ y $h = 0.05$ para obtener los valores aproximados de la solución en $x = 0.5$. En cada etapa, compare el valor aproximado con el valor exacto de la solución analítica.
12. Aunque tal vez no resulte evidente a partir de la ecuación diferencial, su solución puede "comportarse mal" cerca del punto x en el cual deseamos aproximar $y(x)$. Los procedimientos numéricos pueden dar resultados muy diferentes cerca de este punto. Sea $y(x)$ la solución del problema de valor inicial $y' = x^2 + y^3$, $y(1) = 1$.

    a) Utilice un programa de solución numérica para trazar la gráfica de la solución en el intervalo [1, 1.4].

    b) Con el tamaño del paso $h = 0.1$, compare los resultados que se obtuvieron mediante el método de Euler con los del método mejorado de Euler en la aproximación de $y(1.4)$.
13. Considere el problema de valor inicial $y' = 2y$, $y(0) = 1$. La solución analítica es $y = e^{2x}$.

    a) Aproxime $y(0.1)$ empleando una etapa y el método de Euler.

    b) Encuentre una cota para el error de truncamiento local en y_1.

    c) Compare el error real en y_1 con su error de acotamiento.

    d) Aproxime $y(0.1)$ empleando dos etapas y el método de Euler.

    e) Verifique si el error de truncamiento global para el método de Euler es $O(h)$ mediante la comparación de los errores determinados en los incisos *a*) y *d*).
14. Repita el problema 13 mediante el método mejorado de Euler. Su error de truncamiento global es $O(h^2)$.
15. Repita el problema 13 mediante el problema de valor inicial $y' = x - 2y$, $y(0) = 1$. La solución analítica es $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + \frac{5}{4}e^{-2x}$.
16. Repita el problema 15 mediante el método mejorado de Euler. Su error de truncamiento global es $O(h^2)$.
17. Considere el problema de valor inicial $y' = 2x - 3y + 1$, $y(1) = 5$. La solución analítica es $y(x) = \frac{1}{9} + \frac{2}{3}x + \frac{38}{9}e^{-3(x-1)}$.

    a) Deduzca una fórmula donde intervengan c y h para el error de truncamiento local en la etapa n-ésima si se utiliza el método de Euler.

    b) Encuentre una cota para el error de truncamiento local en cada etapa si $h = 0.1$ se usa para aproximar $y(1.5)$.

    c) Aproxime $y(1.5)$ mediante $h = 0.1$ y $h = 0.05$ con el método de Euler. Vea el problema 1 en los ejercicios 2.6.

    d) Determine los errores en el inciso *c*) y verifique si el error de truncamiento global del método de Euler es $O(h)$.
18. Repita el problema 17 mediante el método mejorado de Euler, el cual tiene un error de truncamiento global $O(h^2)$. Vea el problema 1. Quizá necesite más de cuatro cifras decimales para apreciar el efecto de reducir el orden del error.
19. Repita el problema 17 para el problema de valor inicial $y' = e^{-y}$, $y(0) = 0$. La solución analítica es $y(x) = \ln(x + 1)$. Aproxime $y(0.5)$. Vea el problema 5 en los ejercicios 2.6.
20. Repita el problema 19 usando el método mejorado de Euler, el cual tiene como error de truncamiento global $O(h^2)$. Vea el problema 5. Tal vez necesite más de cuatro cifras decimales para advertir el efecto de reducir el orden del error.

Problemas de análisis

21. Responda la pregunta "¿Por qué no?" que sigue a las tres oraciones escritas después del ejemplo 2 en la página 279.

EJERCICIOS 6.2

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-13.

1. Utilice el método RK4 con $h = 0.1$ para aproximar $y(0.5)$, donde $y(x)$ sea la solución del problema de valor inicial $y' = (x + y - 1)^2$, $y(0) = 2$. Compare este valor aproximado con el valor real obtenido en el problema 11 de los ejercicios 6.1.

2. Suponga que $w_2 = \frac{3}{4}$ en (4). Emplee el método de Runge-Kutta para aproximar $y(0.5)$, donde $y(x)$ sea la solución del problema de valor inicial dado en el ejercicio 1. Compare este valor aproximado con el valor aproximado obtenido en el problema 11 de los ejercicios 6.1.

En los problemas del 3 al 12, utilice el método RK4 con $h = 0.1$ para obtener una aproximación decimal al valor indicado.

3. $y' = 2x - 3y + 1,\ y(1) = 5;\ y(1.5)$
4. $y' = 4x - 2y,\ y(0) = 2;\ y(0.5)$
5. $y' = 1 + y^2,\ y(0) = 0;\ y(0.5)$
6. $y' = x^2 + y^2,\ y(0) = 1;\ y(0.5)$
7. $y' = e^{-y},\ y(0) = 0;\ y(0.5)$
8. $y' = x + y^2,\ y(0) = 0;\ y(0.5)$
9. $y' = (x - y)^2,\ y(0) = 0.5;\ y(0.5)$
10. $y' = xy + \sqrt{y},\ y(0) = 1;\ y(0.5)$
11. $y' = xy^2 - \dfrac{y}{x},\ y(1) = 1;\ y(1.5)$
12. $y' = y - y^2,\ y(0) = 0.5;\ y(0.5)$
13. Si la resistencia del aire es proporcional al cuadrado de la velocidad instantánea, entonces la velocidad v de una masa m que cae desde una altura h está determinada por

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv^2,\ k > 0.$$

Sean $v(0) = 0$, $k = 0.125$, $m = 5$ slugs y $g = 32$ ft/s^2.

a) Utilice el método RK4 con $h = 1$ para aproximar la velocidad $v(5)$.

b) Utilice un programa de solución numérica para graficar la solución del PVI en el intervalo [0, 6].

c) Use la separación de variables para resolver el PVI y después encuentre el valor real $v(5)$.

14. Un modelo matemático para el área A (en cm^2) que ocupa una colonia de bacterias (*B. dendroides*) está dado por

$$\frac{dA}{dt} = A(2.128 - 0.0432A).$$

Suponga que el área inicial es de 0.24 cm^2.

a) Utilice el método RK4 con $h = 0.5$ para completar la tabla siguiente.

t (días)	1	2	3	4	5
A (observado)	2.78	13.53	36.30	47.50	49.40
A (aproximado)					

b) Utilice un programa de solución numérica para graficar la solución del problema de valor inicial. Estime los valores $A(1)$, $A(2)$, $A(3)$, $A(4)$ y $A(5)$ a partir de la gráfica.

c) Use la separación de variables para resolver el problema de valor inicial y calcular los valores $A(1)$, $A(2)$, $A(3)$, $A(4)$ y $A(5)$.

15. Considere el problema de valor inicial $y' = x^2 + y^3$, $y(1) = 1$. Vea el problema 12 en los ejercicios 6.1.

a) Compare los resultados obtenidos de usar el método RK4 en el intervalo [1, 1.4] con tamaños del paso $h = 0.1$ y $h = 0.05$.

b) Utilice un programa de solución numérica para graficar la solución del problema de valor inicial en el intervalo [1, 1.4].

16. Considere el problema de valor inicial $y' = 2y$, $y(0) = 1$. La solución analítica es $y(x) = e^{2x}$.

a) Aproxime $y(0.1)$ empleando una etapa y el método RK4 de cuarto orden.

b) Encuentre una cota para el error de truncamiento local en y_1.

c) Compare el error real en y_1 con su acotamiento de error.

d) Aproxime $y(0.1)$ empleando dos etapas y el método RK4.

e) Verifique si el error de truncamiento global para el método RK4 es $O(h^4)$ al comparar los errores de los incisos *a*) y *d*).

17. Repita el problema 16 mediante el problema de valor inicial $y' = -2y + x$, $y(0) = 1$. La solución analítica es

$$y(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + \frac{5}{4}e^{-2x}.$$

18. Considere el problema de valor inicial $y' = 2x - 3y + 1$, $y(1) = 5$. La solución analítica es

$$y(x) = \frac{1}{9} + \frac{2}{3}x + \frac{38}{9}e^{-3(x-1)}.$$

a) Encuentre una fórmula en la que intervengan c y h para el error de truncamiento local en la etapa n-ésima si se utiliza el método RK4.

b) Encuentre una cota para el error de truncamiento local en cada etapa si se usa $h = 0.1$ para aproximar $y(1.5)$.

c) Aproxime $y(1.5)$ mediante el método RK4 con $h = 0.1$ y $h = 0.05$. Vea el problema 3. Necesitará más de seis cifras decimales para poder apreciar el efecto de reducir el tamaño del paso.

19. Repita el ejercicio 18 para el problema de valor inicial $y' = e^{-y}$, $y(0) = 0$. La solución analítica es $y(x) = \ln(x + 1)$. Aproxime $y(0.5)$. Vea el problema 7.

PROBLEM SET

Euler's Method (Section 7.2)

In Problems 1 through 6, given each IVP

a. Using Euler's method with the indicated step size h, calculate the solution estimates at x_1, x_2, and x_3, as well as the local and global truncation errors at those locations,

b. Write a MATLAB script file that uses `EulerODE` to find the approximate values produced by Euler's method and returns a table that includes these values, as well as the exact values and the global percent relative error, at all mesh points in the given interval.

1. $y' + 2xy = 0, \quad y(0) = 1, \quad 0 \le x \le 1, \quad h = 0.1$

   Exact solution is $y = e^{-x^2}$.

2. $xy' = y - x, \quad y(1) = 0, \quad 1 \le x \le 2, \quad h = 0.1$

   Exact solution is $y = -x\ln x$.

3. $e^x y' = y^2, \quad y(0) = 1, \quad 0 \le x \le 0.5, \quad h = 0.05$

   Exact solution is $y = e^x$.

4. $y' = y^2 \cos x, \quad y(0) = \frac{1}{3}, \quad 0 \le x \le 1, \quad h = 0.1$

   Exact solution is $y = 1/(3 - \sin x)$.

5. $xy' = y + y^2, \quad y(2) = 1, \quad 2 \le x \le 3, \quad h = 0.1$

   Exact solution is $y = x/(4 - x)$.

6. $e^x y' = x^2 y^2, \quad y(0) = \frac{1}{3}, \quad 0 \le x \le 1, \quad h = 0.2$

   Exact solution is $y = [e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + 1]^{-1}$.

Runge–Kutta Methods (Section 7.3)

RK2 Methods

✍ In Problems 19 through 22, for each IVP and the indicated step size h, use the following methods to compute the solution estimates at x_1 and x_2.

a. Improved Euler

b. Heun

c. Ralston

19. $2y' + xy = 0, \quad y(0) = 1, \quad 0 \le x \le 1, \; h = 0.1$
20. $xy' = y - 3x, \quad y(1) = 1, \quad 1 \le x \le 2, \; h = 0.1$
21. $y' = e^{-2x}y^2, \quad y(0) = \frac{1}{2}, \; 0 \le x \le 1, \; h = 0.05$
22. $y' = y^2 \sin\left(\frac{1}{2}x\right), \quad y(0) = 1, \; 0 \le x \le 2, \; h = 0.2$

RK4 Methods

✍ In Problems 32 through 35, for each IVP and the indicated step size h, use the classical RK4 method to compute the solution estimates at x_1 and x_2.

32. $xy' + 3y = x, \quad y(1) = 1, \quad 1 \le x \le 2, \quad h = 0.2$
33. $y' + 0.65y = 1.3e^{-x/4}, \quad y(0) = 1, \quad 0 \le x \le 1.5, \quad h = 0.15$
34. $y' = 12(2 - x)(3 - x), \quad y(0) = 0, \quad 0 \le x \le 0.8, \quad h = 0.08$
35. $xy' + 2y = x \ln x, \quad y(1) = 0, \quad 1 \le x \le 2, \quad h = 0.1$