SOLUCIÓN NUMÉRICA DE

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE PRIMER ORDEN

SOLUCION NUMERICA

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

Una solución de esta ecuación inicial con CI es una función

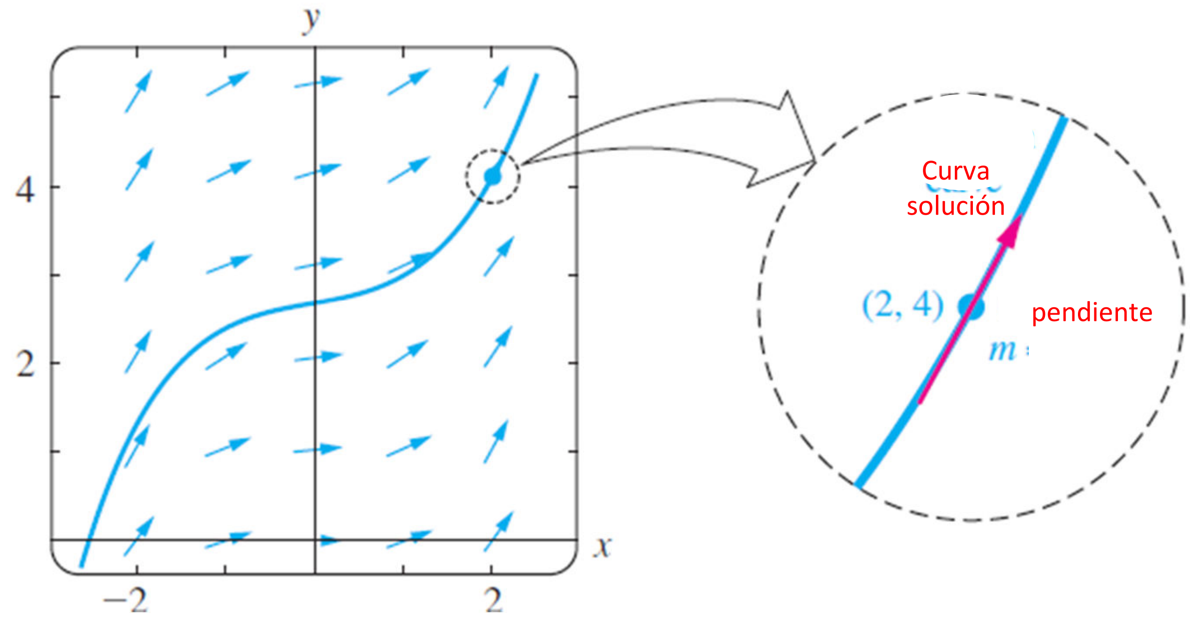
$$\varphi : (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \to R$$

tal que

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)), \quad \text{para } x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$$

PROBLEMA: Hallar una aproximación numérica de la solución de la EDO con CI

Campo de pendientes f(x,y)



Conocemos $\varphi(a) = \varphi(x_0)$

Queremos obtener una aproximación de $\varphi(b)$ para $b > a$

Consideramos una partición del intervalo $[a, b]$

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b,$$

donde $h = \frac{t_{i+1} - t_i}{n}$ lo llamamos tamaño de paso. Observemos que

$$t_k = kh + t_0, \qquad k = 1, 2, \ldots n$$

Consideramos la condición inicial

$$(x_0, y_0) = (x_0, y(x_0)) = (a, y(a))$$

El desarrollo de Taylor 1er orden alrededor de x_0

$$y(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) + R_2(x)$$

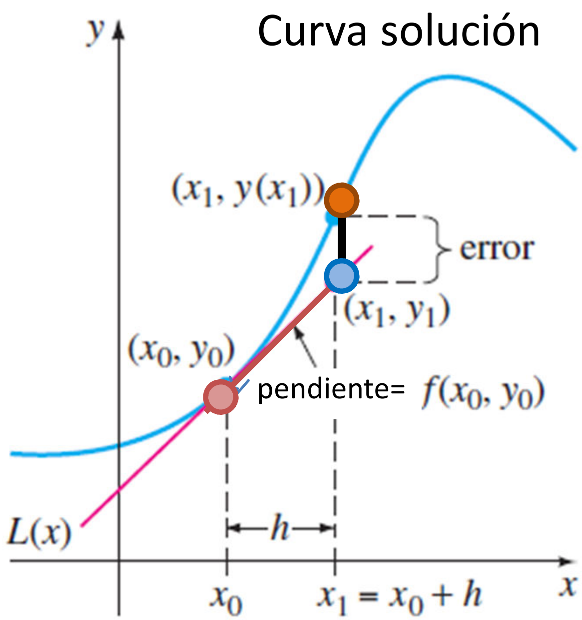
obtenemos la aproximación lineal de $y(x)$

cerca de x_0

$$y(x) \approx y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0)$$

tomando $x = x_1 = x_0 + h$

obtenemos $y(x) = y(x_1) = y(x_0 + h) \approx y(x_0) + y'(x_0)h = y(x_0) + f(x_0, y_0)h$



Valor nuevo = Valor anterior + (Pendiente)(Tamaño del paso)

En resumen:

$$\boxed{\begin{aligned} y_1 = y(x_1) &\approx y(x_0) + f(x_0, y_0)h \\ &= y_0 + f(x_0, y_0)h \end{aligned}}$$

En general, tenemos

$$\boxed{\begin{aligned} y_{k+1} = y(x_{k+1}) &\approx y(x_k) + f(x_k, y_k)h \\ &= y_k + f(x_k, y_k)h \end{aligned}}$$

Valor nuevo = Valor anterior + (Pendiente)(Tamaño del paso)

Ejemplo Método de Euler

$$\frac{dy}{dt} = 3 + e^{-t} - \tfrac{1}{2}y, \qquad y(0) = 1.$$

$$f(t, y) = 3 + e^{-t} - y/2.$$

$$h = 0.1$$

$$y_1 = y_0 + f(t_0, y_0)h = 1 + (3.5)(0.1) = 1.35$$

$$f(t_0, y_0) = f(0, 1) = 3 + e^0 - 0.5 = 3 + 1 - 0.5 = 3.5$$

$$y(t_2) \cong y_2 = y_1 + f(t_1, y_1)h = 1.35 + f(0.1, 1.35)(0.1)$$

$$= 1.35 + (3.229837)(0.1) \cong 1.672984$$

$$f(0.1, 1.35) = 3 + e^{-0.1} - (0.5)(1.35) \cong 3 + 0.904837 - 0.675 \cong 3.229837$$

SI QUEREMOS APROXIMAR y(1) CONTINUAMOS CON ESTE PROCESO

Ejemplo

Consideremos la ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{dy}{dt} = K(y - s), \qquad y_0 = y(0)$$

Recordemos que no es difícil encontrar la solución analítica, mediante el método de separación de variables, de la ecuación diferencial.
Ejercicio: Hallar la solución analítica de la ecuación diferencial anterior

$$y(t) = y_0 e^{Kt} + s(1 - e^{Kt}),$$

Veamos nuestro primer ejemplo para resolover ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden mediante Matlab:

```
function r = yexact(t,y0,K,s)
r = y0*exp(K*t) + s*(1 - exp(K*t));
```

Se ha definido una función que depende de cuatro argumentos: el temporal, la condición inicial y dos constantes. Supongamos que sus valores están dados por y0=100, K=1, and s=20. Escribamos el siguiente código en nuestra pantalla del editor de Matlab:

El siguiente comando crea un vector

```
t = 0:0.01:5;
```

El siguiente comando crea la gráfica de la solución

```
plot(t,yexact(t,100,1,20))
```

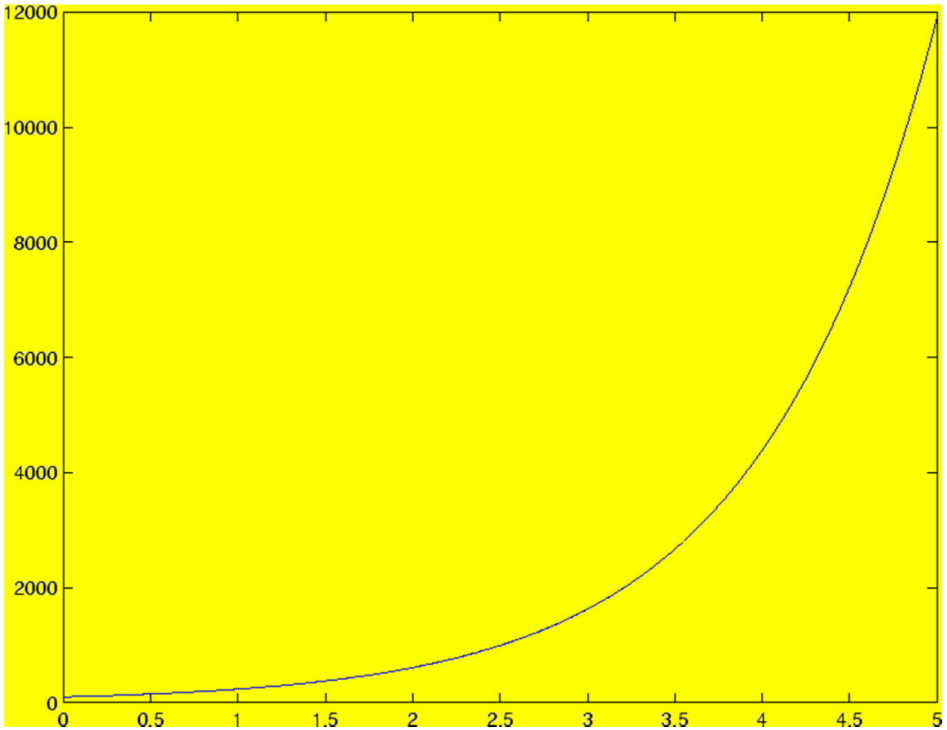


Figura 1: Solución exacta

$$s = 20$$

$$K = 1$$

$$y_0 = 100$$

Estructura computacional del Método de Euler

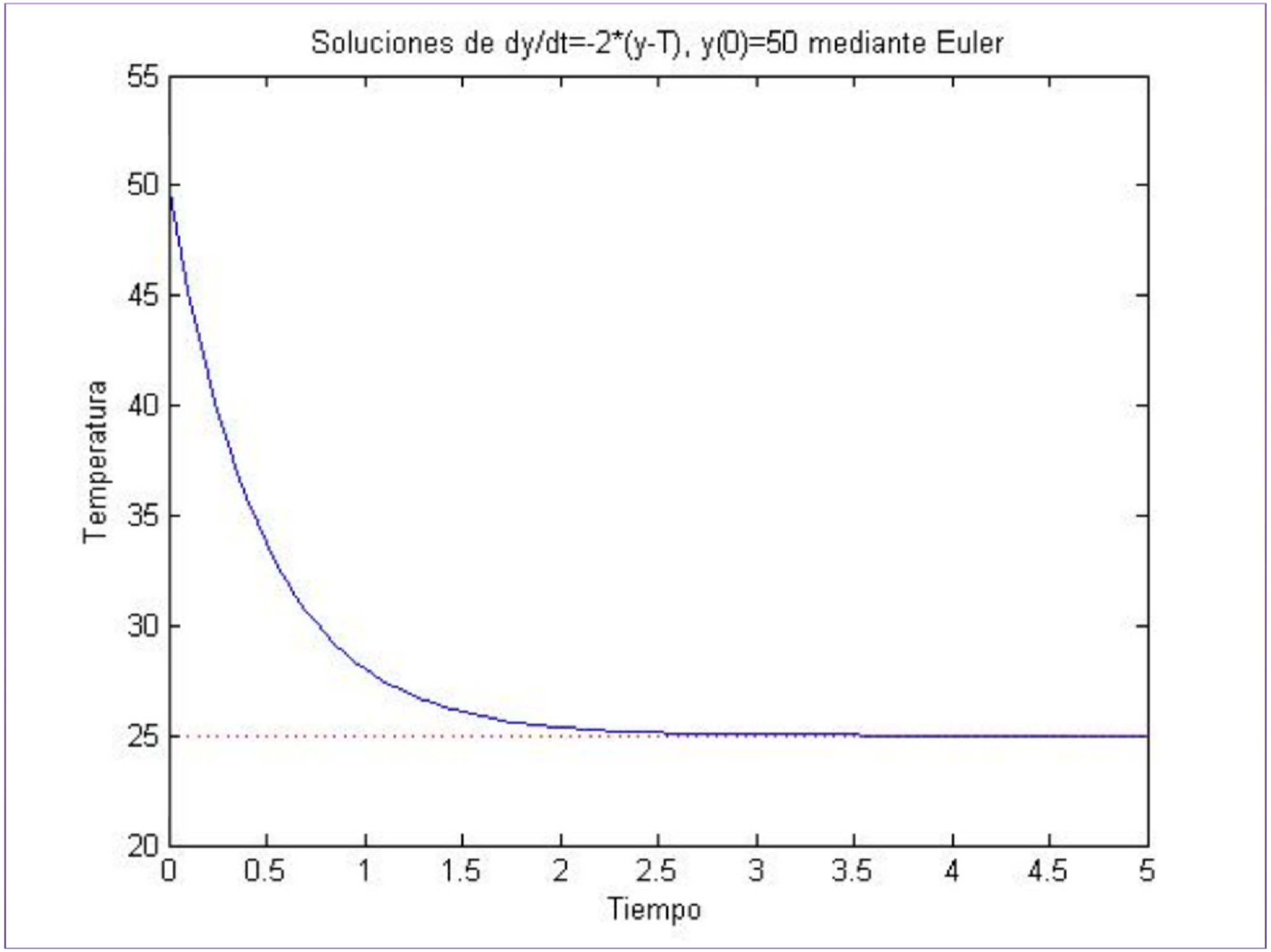
Paso 1. definir *f (t, y)*
Paso 2. Entrada: Valores iniciales *t0 and y0*
Paso 3. entrada tamaño de paso *h # de pasos n*
Paso 4. salida *t0 and y0*
Paso 5. para *j de 1 a n do*
Paso 6. *k1 = f (t, y)*
$y = y + h * k1$
$T = t + h$
Paso 7. salidas *t y y*
Paso 8. end

Programa en Matlab

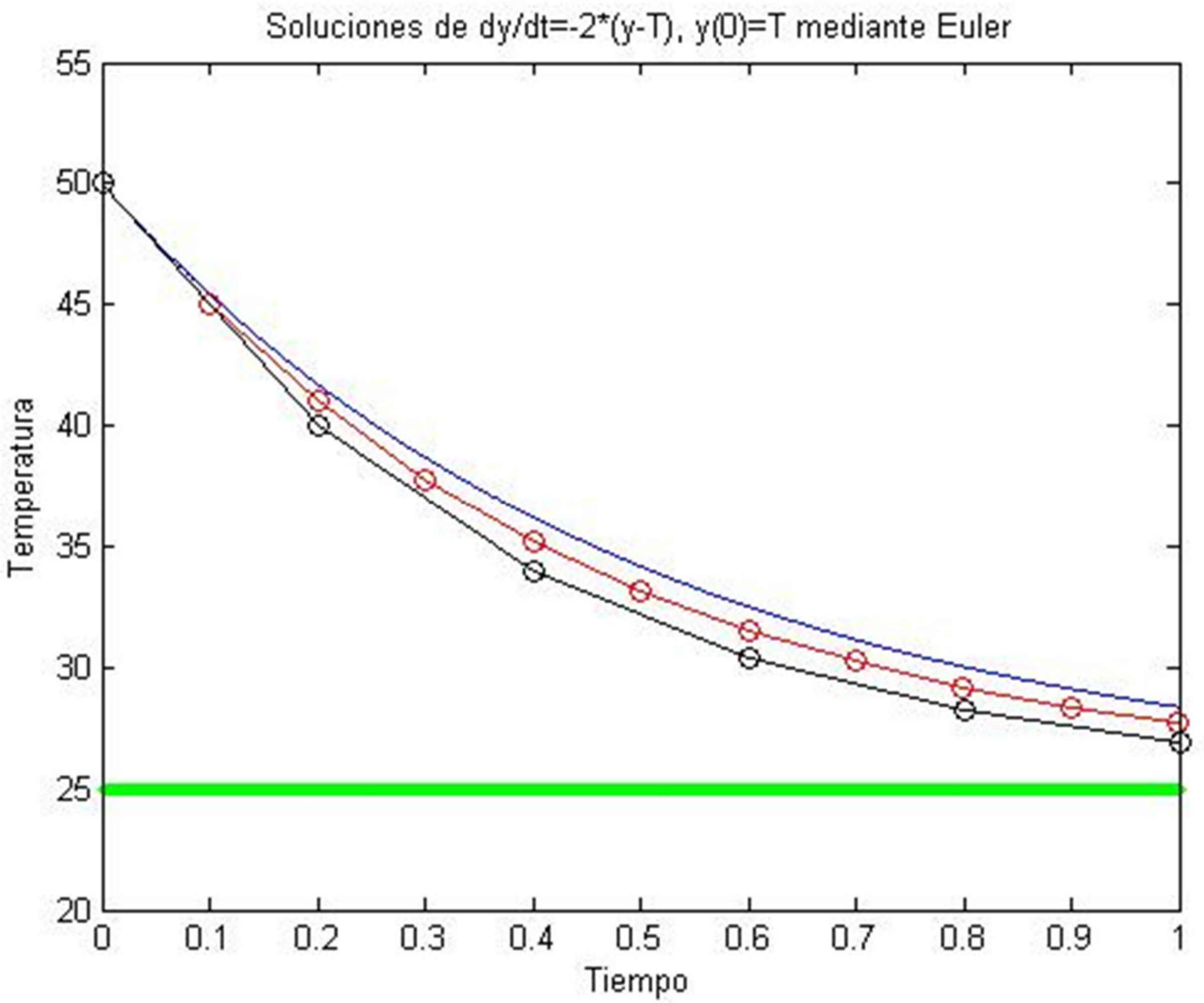
```
clc;
clf;
clear all;
T=25;
tinic=0.0;
tfinal=5.0;
yinic=50.0;
n=100;
f=@(t,y) -2*(y-T);
h=(tfinal-tinic)/n;
t=zeros(1,n+1);
y=zeros(1,n+1);
t(1)=tinic;
y(1)=yinic;
for i=1:n
   t(i+1)=t(i)+h;
   y(i+1)=y(i)+h*f(t(i),y(i));
end
```

```
plot(t,y,'b')
title('Soluciones de dy/dt=-2*(y-T),
y(0)=T mediante Euler')
axis([0 5 20 55])
xlabel('Tiempo');
ylabel('Temperatura')
hold on
plot(t,25,'-r')
```

Gráfica obtenida con Matlab



Diferentes números de paso n=5,10



Programas Método de Euler en Matlab

TIPO FUNCIÓN

```
function [t,y]=Euler_clasico(f,tinic,yinic,tfinal,n)
h=(tfinal-tinic)/n;
t=zeros(1,n+1);
y=zeros(1,n+1);
t(1)=tinic;
y(1)=yinic;
for i=1:n
   t(i+1)=t(i)+h;
   y(i+1)=y(i)+h*f(t(i),y(i));
end
```

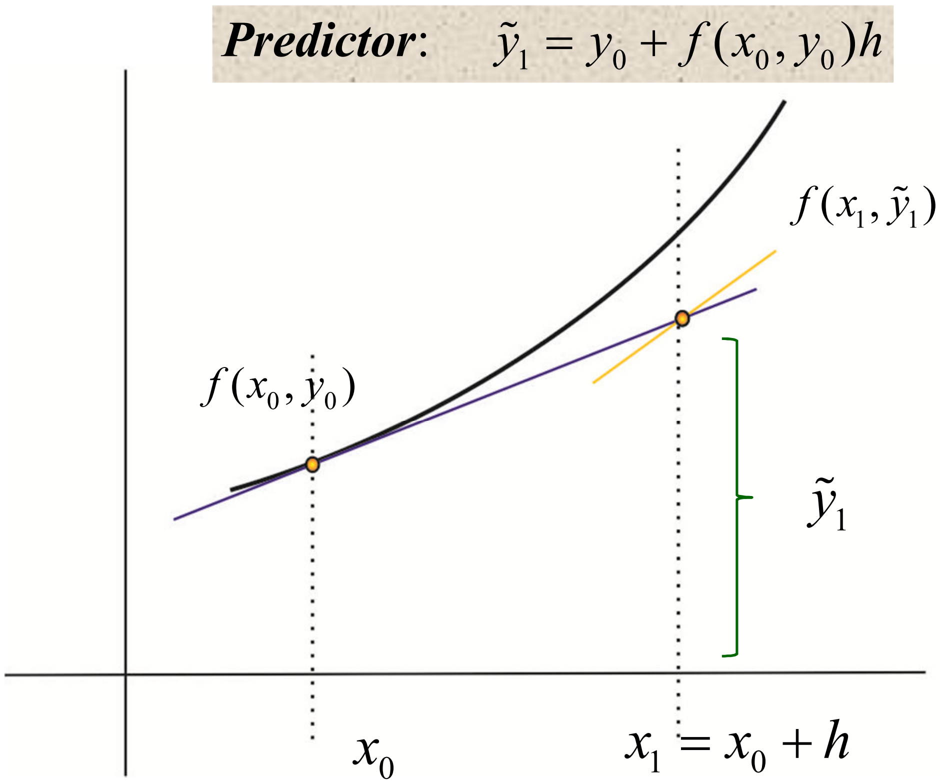
TIPO SCRIPT

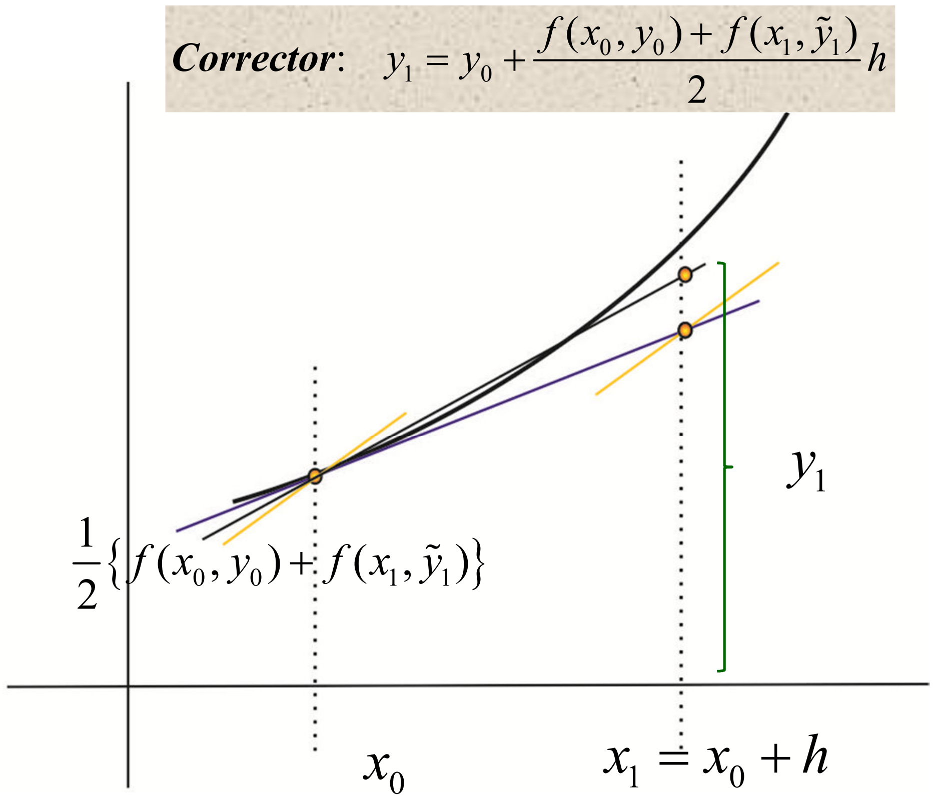
```
clc;
clf;
clear all;
T=25;
tinic=0.0;
tfinal=5.0;
yinic=50.0;
n=100;
f=@(t,y) -2*(y-T);
[t1,y1]=Euler_clasico(f,tinic,yinic,tfinal,n);
plot(t1,y1,'b')
title('Soluciones de dy/dt=-2*(y-T),
y(0)=T mediante Euler')
axis([0 5 20 55])
xlabel('Tiempo');
ylabel('Temperatura')
hold on
plot(t1,25,'-r')
```

```
%%%PROGRAMA DEL METODO DE EULER MODIFICADO CON UN ARCHIVO
TIPO SCRIPT%%%
%%%ECUACION DIFERENCIAL ORDINARIA dy/dt=k(y-c)%%%%

k = 1;
c = 20;
y0= 100;
npuntos = 50;  %%Numero de pasos%%
h = 0.1;

y = zeros(npuntos,1); %Inicializamos el vector 'y' de posiciones con ceros%
t = zeros(npuntos,1); %Inicializamos el vector 't' de tiempos con ceros%

y(1) = y0; %Posicion inicial%
t(1) = 0.0; %Timepo inicial%

   for j = 1 : npuntos %-1 % loop para el tamaño de paso%
      y(j+1) = y(j) + (h/2) * ((k*(y(j)-c)+ y(j) +h*k*(y(j)-c)));
      t(j+1) = t (j) + h;
   end
```

```
%%Hemos terminado la simulacion numerica%%
  %%Para el ERROR%%

  z = exp(t + log(80))+ 20; %Solucion analitica de la ecuacion

  %%Empezemos la parte de la visualizacion%%

  plot (t,y,'-bo',t,z,'r')
  grid on
  xlabel('tiempo')
  ylabel('y(t)')
  legend('solucion numerica','solucion analitica')
  title('Solucion numerica mediante Euler mejorado Vs …
solucion analitica')
```

Euler mejorado (Heun, predictor-corrector)





Predictor: $\tilde{y}_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h$

Corrector: $y_{i+1} = y_i + \dfrac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1})}{2}h$

Ejemplo Euler-mejorado

$$\frac{dy}{dx} = x + y, \quad y(0) = 1 \qquad f(x, y) = x + y$$

$h = 0.1$

$$u_1 = 1 + (0.1) \cdot (0 + 1) = 1.1,$$
$$y_1 = 1 + (0.05) \cdot [(0 + 1) + (0.1 + 1.1)] = 1.11,$$
$$u_2 = 1.11 + (0.1) \cdot (0.1 + 1.11) = 1.231,$$
$$y_2 = 1.11 + (0.05) \cdot [(0.1 + 1.11) + (0.2 + 1.231)] = 1.24205,$$

Comparación Euler vs. Euler-mejorado

x	**Euler Method, $h = 0.1$ Values of y**	**Euler Method, $h = 0.005$ Values of y**	**Improved Euler, $h = 0.1$ Values of y**	**Actual y**
0.1	1.1000	1.1098	1.1100	1.1103
0.2	1.2200	1.2416	1.2421	1.2428
0.3	1.3620	1.3977	1.3985	1.3997
0.4	1.5282	1.5807	1.5818	1.5836
0.5	1.7210	1.7933	1.7949	1.7974
0.6	1.9431	2.0388	2.0409	2.0442
0.7	2.1974	2.3205	2.3231	2.3275
0.8	2.4872	2.6422	2.6456	2.6511
0.9	2.8159	3.0082	3.0124	3.0192
1.0	3.1875	3.4230	3.4282	3.4366

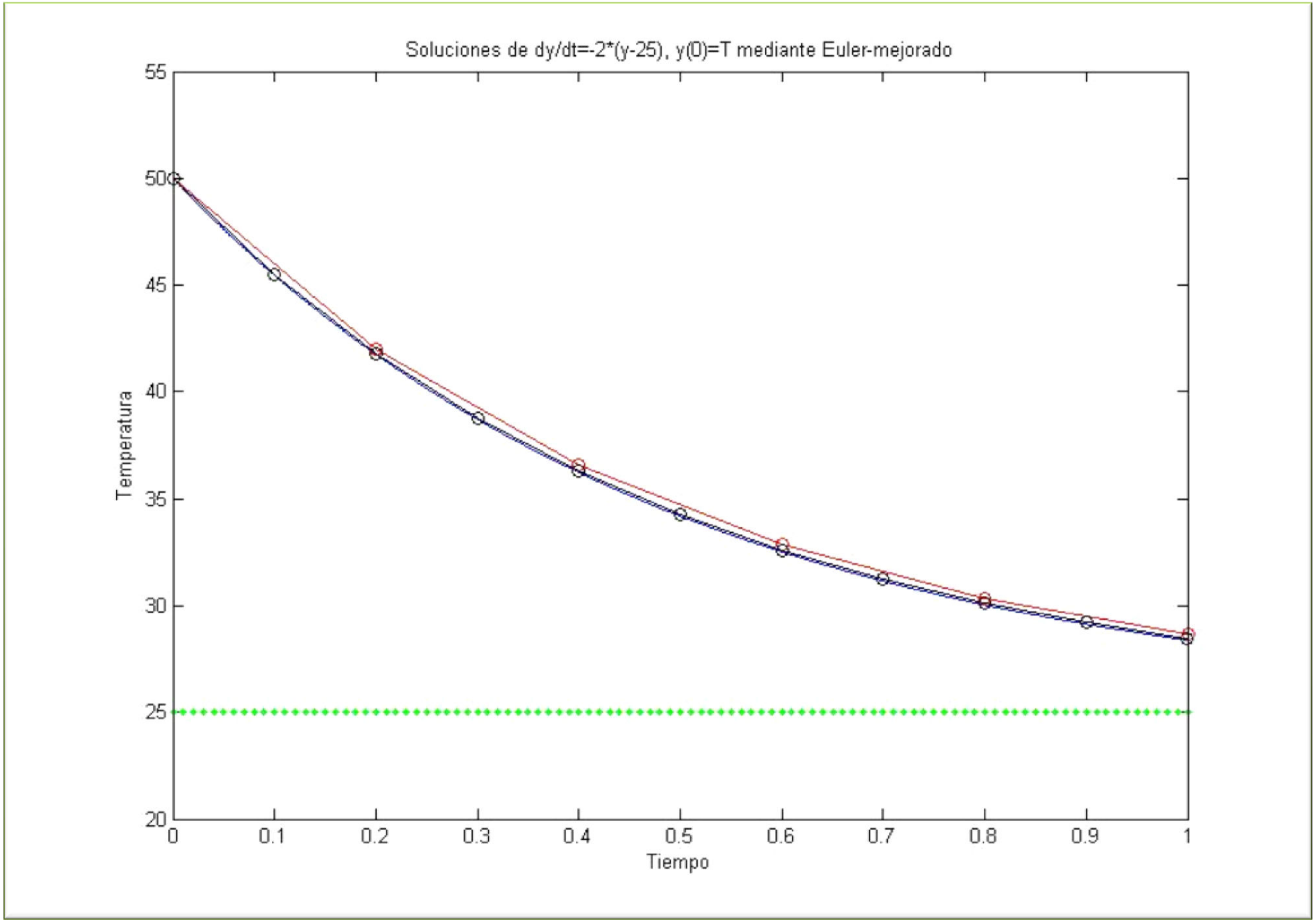
Estructura computacional del Método de Euler Mejorado

Paso 1. definir ***f (t, y)***
Paso 2. Entrada: Valores iniciales ***t0 and y0***
Paso 3. entrada tamaño de paso ***h # de pasos n***
Paso 4. salida ***t0 and y0***
Paso 5. para ***j de 1 a n do***
Paso 6. $k1 = f(t, y)$
$k2 = f(t + h, y + h * k1)$
$y = y + (h/2) * (k1 + k2)$
$t = t + h$
Paso 7. salidas ***t y y***
Paso 8. end

Programa Euler-mejorado en Matlab

```
function
[t,y]=Euler_mejorado(f,tinic,yinic,tfinal,n)
h=(tfinal-tinic)/n;
t=zeros(1,n+1);
y=zeros(1,n+1);
t(1)=tinic;
y(1)=yinic;
for i=1:n
  t(i+1)=t(i)+h;
  P1=f(t(i),y(i));
  P2=f(t(i)+h,y(i)+h*P1);
  y(i+1)=y(i)+(h/2)*(P1+P2);
end
```

```
tinic=0.0;
tfinal=1.0;
yinic=50.0;
n=1000;
f=@(t,y) -2*(y-25);
[t3,y3]=Euler_mejorado(f,tinic,yi
nic,tfinal,n);
plot(t3,y3,'b')
title('Soluciones de dy/dt=-2*(y-
25), y(0)=T mediante Euler-
mejorado')
axis([0 1 20 55])
xlabel('Tiempo');
ylabel('Temperatura')
axis([0 1 20 55])
```


Soluciones de dy/dt=-2*(y-25), y(0)=T mediante Euler-mejorado
Temperatura
Tiempo
55
50
45
40
35
30
25
20
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1

Método de Punto Medio (o Polígono mejorado)

- Se usa el método de Euler para realizar una predicción del valor de la solución usando la pendiente en un punto intermedio del intervalo

$$y_{i+1/2} = y_i + f(x_i, y_i)\frac{h}{2}$$

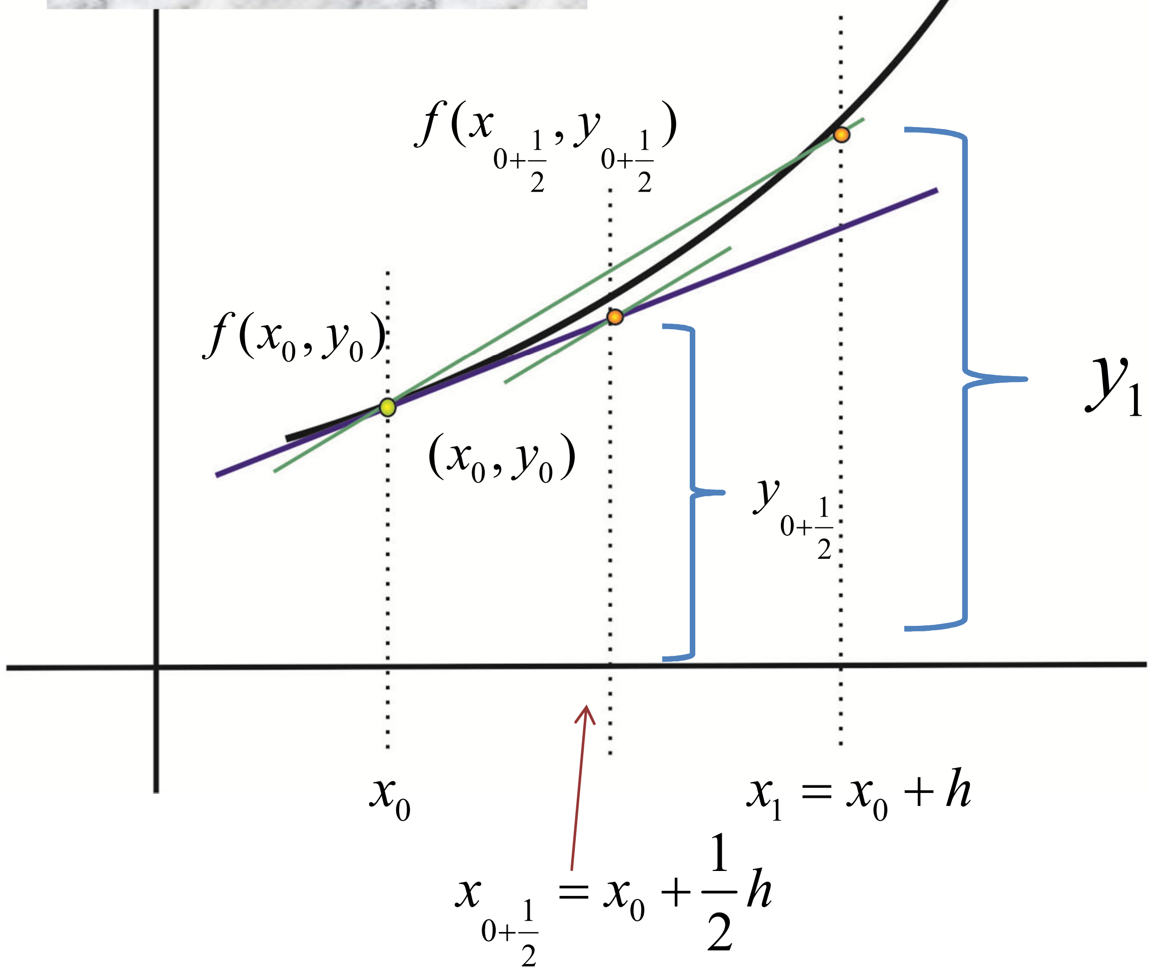
$$y_{i+1} = y_i + f(x_{i+1/2}, y_{i+1/2})h$$

Geometría Punto Medio

Predicción

$$y_{0+\frac{1}{2}} = y_0 + \frac{h}{2} f(x_0, y_0)$$

$$y_1 = y_0 + f(x_{0+\frac{1}{2}}, y_{0+\frac{1}{2}})h$$



Punto Medio

Predicción

$$y_{i+\frac{1}{2}} = y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i)$$

$$y_{i+1} = y_i + f\left(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}}\right)h$$

¿Qué hemos hecho hasta el momento?

Queremos aproximar numericamente soluciones de EDO's de primer orden

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

Filosofía:

Valor nuevo = valor viejo + pendiente * (tamaño_paso)

$y_{i+1} = y_i + \varphi * h$

y_{i+1} valor nuevo, y_i valor viejo

φ pendiente, h tamaño de paso

Runge Kuta

Buscamos un método de la forma

Valor nuevo = valor viejo + pendiente * (tamaño_paso)

$$y_{i+1} = y_i + \varphi * h$$

y_{i+1} valor nuevo, y_i valor viejo

φ pendiente, h tamaño de paso

De manera que la pendiente sea una pendiente ponderada sobre distintos puntos del intervalo [x(i),x(i+1)].

Runge Kuta de Cuarto Orden (Acto de fe)

Valor nuevo = valor viejo + pendiente * (tamaño_paso)

$$y_{k+1} = y_k + \varphi * h$$

y_{k+1} valor nuevo, y_k valor viejo

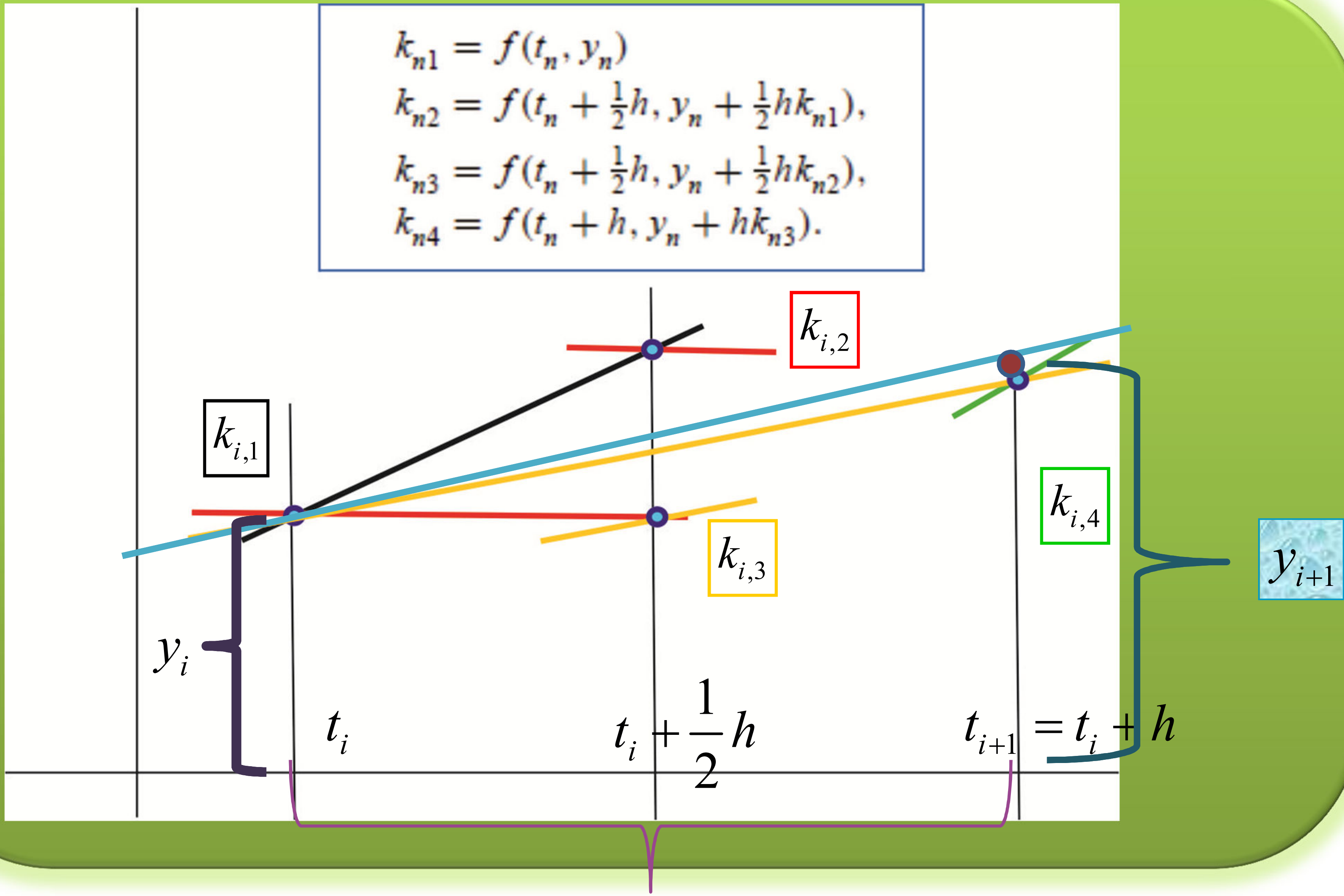
φ pendiente, h tamaño de paso

$$y_{n+1} = y_n + h\left(\frac{k_{n1} + 2k_{n2} + 2k_{n3} + k_{n4}}{6}\right),$$

$$\begin{aligned}
k_{n1} &= f(t_n, y_n) \\
k_{n2} &= f(t_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}hk_{n1}), \\
k_{n3} &= f(t_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}hk_{n2}), \\
k_{n4} &= f(t_n + h, y_n + hk_{n3}).
\end{aligned}$$

$$y_{k+1} = y_k + \varphi * h, \quad \varphi = \frac{1}{6}\left(k_{n1} + 2k_{n2} + 2k_{n3} + k_{n4}\right)$$

$$
\begin{aligned}
k_{n1} &= f(t_n, y_n) \\
k_{n2} &= f(t_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}hk_{n1}), \\
k_{n3} &= f(t_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}hk_{n2}), \\
k_{n4} &= f(t_n + h, y_n + hk_{n3}).
\end{aligned}
$$



Ejemplo Runge Kuta Cuarto Orden

$$y' = 1 - t + 4y, \qquad y(0) = 1.$$

$$f(t, y) = 1 - t + 4y$$

Tamaño de paso: $h = 0.2$

$$\begin{aligned}
k_{01} &= f(0, 1) = 5; \qquad hk_{01} = 1.0,\\
k_{02} &= f(0 + 0.1, 1 + 0.5) = 6.9; \qquad hk_{02} = 1.38,\\
k_{03} &= f(0 + 0.1, 1 + 0.69) = 7.66; \qquad hk_{03} = 1.532,\\
k_{04} &= f(0 + 0.2, 1 + 1.532) = 10.928.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_1 &= 1 + \frac{0.2}{6}[5 + 2(6.9) + 2(7.66) + 10.928]\\
&= 1 + 1.5016 = 2.5016.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y(t_1) &= y(t_0 + h) = y(0 + 0.2)\\
&= y(0.2) \cong y_1 \cong 2.5016
\end{aligned}$$

Otro ejemplo

$$\frac{dy}{dx} = x + y, \quad y(0) = 1 \qquad \boxed{y(1) = ?}$$

Tamaño de paso $\boxed{h = 0.5,}$

Es necesario realizar dos "juegos" de cálculos

Calculamos las cuatro pendientes

$$\begin{aligned}
k_1 &= 0 + 1 = 1, \\
k_2 &= (0 + 0.25) + (1 + (0.25) \cdot (1)) = 1.5, \\
k_3 &= (0 + 0.25) + (1 + (0.25) \cdot (1.5)) = 1.625, \\
k_4 &= (0.5) + (1 + (0.5) \cdot (1.625)) = 2.3125,
\end{aligned}$$

$$y_1 = 1 + \frac{0.5}{6}[1 + 2 \cdot (1.5) + 2 \cdot (1.625) + 2.3125] \approx 1.7969.$$

Repitiendo el proceso $y_2 \approx 3.4347.$

Obtención de Runge Kuta de Segundo Orden

$$y_{i+1} = y_i + \varphi h$$

$$\varphi = a_1 k_1 + a_2 k_2 + \ldots + a_M k_M$$

φ es una pendiente ponderada de salida

a_i constantes

$$k_1 = f(t_i, y_i)$$

$$k_2 = f(t_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h)$$

$$k_3 = f(t_i + p_2 h, y_i + q_{21} k_1 h + q_{22} k_2 h)$$

$$\vdots$$

$$k_M = f(t_i + p_{M-1} h, y_i + q_{M-1,1} k_1 h + \ldots + q_{M-1,M-11} k_{N-11} h)$$

Aproximación de la solución por serie de Taylor de segundo orden alrededor de $t = t_i$

$$y(t_i + h) = y(t_i) + y'(t_i)h + y''(t_i)\frac{h^2}{2} + O(h^3)$$

Pero podemos calcular $y'(t_i)$ y $y''(t_i)$

$$y'(t_i) = f(t_i, y(t_i))$$

$$y''(t_i) = \frac{\partial f(t_i, y(t_i))}{\partial t} + \frac{\partial f(t_i, y(t_i))}{\partial y} y'(t_i)$$

$$= \frac{\partial f(t_i, y(t_i))}{\partial t} + \frac{\partial f(t_i, y(t_i))}{\partial y} \cdot f(t_i, y(t_i))$$

La aproximación obtenida está dada por

$$y(t_{i+1}) = y(t_i + h)$$

$$\cong y(t_i) + y'(t_i)h + y''(t_i)\frac{h^2}{2}$$

$$= y(t_i) + f(t_i, y(t_i))h + \left[\frac{\partial f(t_i, y(t_i))}{\partial t} + \frac{\partial f(t_i, y(t_i))}{\partial y} \cdot f(t_i, y(t_i))\right]\frac{h^2}{2}$$

De esta forma,

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + f(t_i, y(t_i))h + \left[\frac{\partial f(t_i, y(t_i))}{\partial t} + \frac{\partial f(t_i, y(t_i))}{\partial y} \cdot f(t_i, y(t_i))\right]\frac{h^2}{2}$$

Aproximación por Serie de Taylor a primer orden de una función de dos variables

$$f(t_i + H, y_i + K) \approx f(t_i, y_i) + \frac{\partial f(t_i, y_i)}{\partial t}(H) + \frac{\partial f(t_i, y_i)}{\partial y}(K)$$

Para aproximar k_2 tomamos $\boxed{H = p_1 h \quad \text{y} \quad K = q_{11} k_1 h}$

De esta forma, obtenemos

$$\begin{aligned} k_2 &= f(t_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h) \\ &= f(t_i, y_i) + \frac{\partial f(t_i, y_i)}{\partial t} \cdot [p_1 h] + \frac{\partial f(t_i, y_i)}{\partial y} \cdot [q_{11} k_1 h] \end{aligned}$$

De esta forma

$$
\begin{aligned}
\varphi &= a_1k_1 + a_2k_2 \\
&= a_1 f(t_i, y_i) + a_2\left[f(t_i, y_i) + \frac{\partial f(t_i, y_i)}{\partial t}\cdot\left[p_1 h\right] + \frac{\partial f(t_i, y_i)}{\partial y}\cdot\left[q_{11}k_1 h\right]\right] \\
&= \left[a_1 + a_2\right] f(t_i, y_i) + h\left[a_2 p_1 \frac{\partial f(t_i, y_i)}{\partial t} + a_2 q_{11} k_1 \frac{\partial f(t_i, y_i)}{\partial y}\right] \\
&= \left[a_1 + a_2\right] f(t_i, y_i) + h\left[a_2 p_1 \frac{\partial f(t_i, y_i)}{\partial t} + a_2 q_{11} f(t_i, y_i) \frac{\partial f(t_i, y_i)}{\partial y}\right]
\end{aligned}
$$

En consecuencia,

$$y_{i+1} \cong y(t_{i+1}) = y_i + \varphi h = y(t_i) + \varphi h$$

$$= y(t_i) + \left[\left[a_1 + a_2 \right] f(t_i, y_i) + h \left[a_2 p_1 \frac{\partial f(t_i, y_i)}{\partial t} + a_2 q_{11} f(t_i, y_i) \frac{\partial f(t_i, y_i)}{\partial y} \right] \right] h$$

$$= y(t_i) + \left[a_1 + a_2 \right] f(t_i, y_i) h + \left[a_2 p_1 \frac{\partial f(t_i, y_i)}{\partial t} + a_2 q_{11} f(t_i, y_i) \frac{\partial f(t_i, y_i)}{\partial y} \right] h^2$$

En resumen,

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + \left[a_1 + a_2 \right] f(t_i, y_i) h + \left[a_2 p_1 \frac{\partial f(t_i, y_i)}{\partial t} + a_2 q_{11} f(t_i, y_i) \frac{\partial f(t_i, y_i)}{\partial y} \right] h^2$$

Hemos obtenido dos aproximaciones para $y(t_{i+1})$, a saber:

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + f(t_i, y(t_i))h + \left[\frac{\partial f(t_i, y(t_i))}{\partial x} + \frac{\partial f(t_i, y(t_i))}{\partial y} \cdot f(t_i, y(t_i)) \right] \frac{h^2}{2}$$

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + \left[a_1 + a_2 \right] f(t_i, y_i)h + \left[a_2 p_1 \frac{\partial f(t_i, y_i)}{\partial t} + a_2 q_{11} f(t_i, y_i) \frac{\partial f(t_i, y_i)}{\partial y} \right] h^2$$

Igualando coeficientes

$$a_1 + a_2 = 1, \qquad a_2 p_1 = \frac{1}{2} \qquad \text{y} \qquad a_2 q_{11} = \frac{1}{2}$$

Es decir,

$$\boxed{a_1 = 1 - a_2, \qquad p_1 = \frac{1}{2a_2} \qquad \text{y} \qquad q_{11} = \frac{1}{2a_2}}$$

Por lo que tenemos una infinidad de Métodos de Runge Kuta de orden 2, uno por cada valor que le demos al parámetro independiente a_2

Casos particulares

$$\boxed{a_1 = a_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow p_1 = q_{11} = 1}$$

$$\left\{ \begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \varphi h \\ \varphi &= a_1 k_1 + a_2 k_2 = \frac{1}{2}\left[k_1 + k_2\right] \end{aligned} \right.$$

donde

$$k_1 = f(t_i, y_i)$$

$$\begin{aligned} k_2 &= f(t_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h) \\ &= f(t_i + h, y_i + k_1 h) \\ &= f(t_i + h, y_i + f(t_i, y_i) h) \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$y_{i+1} = y_i + \left[\frac{f(t_i, y_i) + f(t_i + h, y_i + k_1 h)}{2}\right] h$$

¡¡¡¡¡¡Euler modificado (Heun o predictor-corrector)!!!!!!

Casos particulares

$$\boxed{a_1 = 0, \quad a_2 = 1 \Rightarrow p_1 = q_{11} = \frac{1}{2}} \quad \left\{ \begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \varphi h \\ \varphi &= a_1 k_1 + a_2 k_2 = k_2 \end{aligned} \right.$$

donde

$$\begin{aligned} k_2 &= f(t_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h) \\ &= f(t_i + \frac{1}{2} h, y_i + \frac{1}{2} f(t_i, y_i) h) \end{aligned}$$

Por lo tanto
$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + f(t_i + \frac{1}{2} h, y_i + \frac{1}{2} k_1 h) h \\ &= y_i + f(t_{i+\frac{1}{2}}, y_i + \frac{1}{2} k_1 h) h \end{aligned}$$

$$y_{i+1} = y_i + f(t_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 h)h$$

$$= y_i + f(t_{i+\frac{1}{2}}, y_i + \frac{1}{2}k_1 h)h$$

$$\tilde{y}_{i+\frac{1}{2}} = y_i + \frac{1}{2}k_1 h = y_i + f(t_i, y_i)\left[\frac{1}{2}h\right]$$

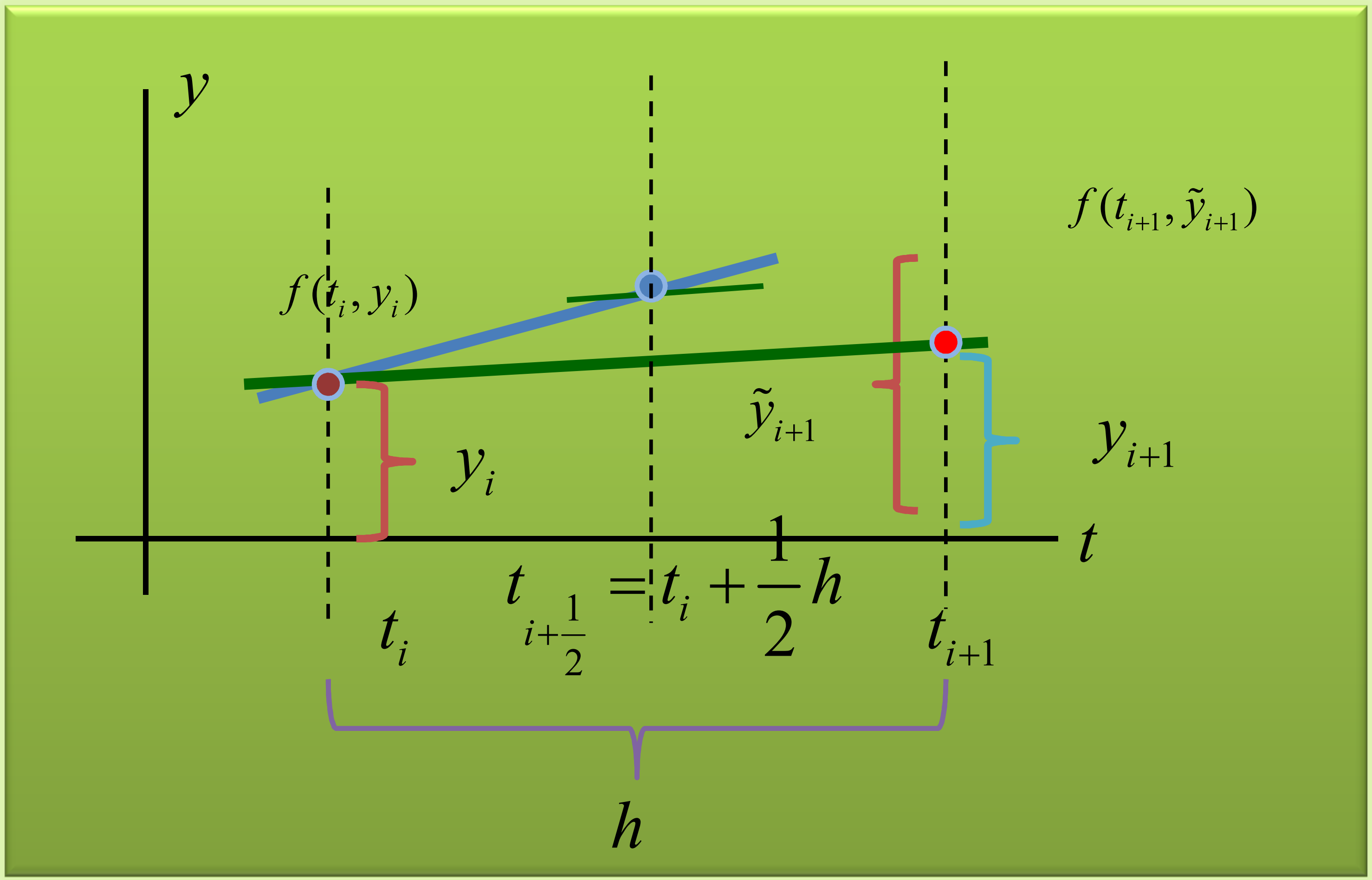
$$y_{i+1} = y_i + f(t_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 h)h$$

$$= y_i + f(t_{i+\frac{1}{2}}, \tilde{y}_{i+\frac{1}{2}})h$$

Obtenemos el Método de *Punto Medio*

Geometría del método

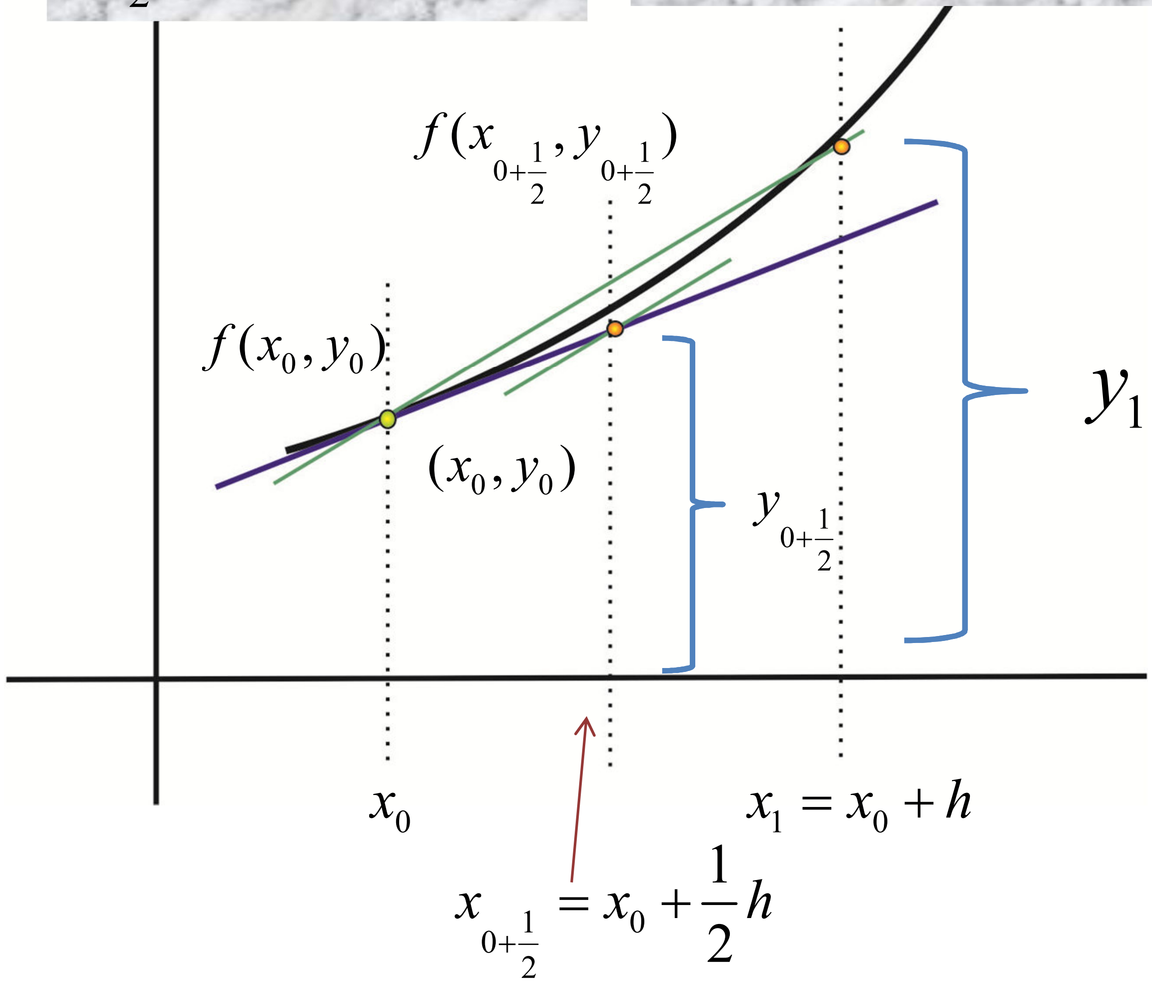
$$\tilde{y}_{i+\frac{1}{2}} = y_i + \frac{1}{2}k_1 h = y_i + f(t_i, y_i)\left[\frac{1}{2}h\right] \qquad y_{i+1} = y_i + f(t_{i+\frac{1}{2}}, \tilde{y}_{i+\frac{1}{2}})h$$



Predicción

$$y_{0+\frac{1}{2}} = y_0 + \frac{h}{2} f(x_0, y_0)$$

$$y_1 = y_0 + f(x_{0+\frac{1}{2}}, y_{0+\frac{1}{2}})h$$



Sistemas de ecuaciones diferenciales

$$ax''(t)+bx'(t)+cx(t)=F(t)$$

Cond. inic: $x(t_0)=x_0, x'(t_0)=\tilde{x}_0$

con el cambio de variables $y(t)=x'(t)$

tenemos que

$$y'(t)=x''(t).$$

En consecuencia

$$x'=y$$

$$y'=\frac{1}{a}F(t)-\frac{b}{a}y-\frac{c}{a}x$$

$$x' = y$$
$$y' = \frac{1}{a}F(t) - \frac{b}{a}y - \frac{c}{a}x$$

$$x' = f_1(x,y,t) = y$$
$$y' = f_2(x,y,t) = \frac{1}{a}F(t) - \frac{b}{a}y - \frac{c}{a}x$$

$$Y = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow Y' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, Y(t_0) = \begin{pmatrix} x(t_0) \\ y(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ \tilde{x}_0 \end{pmatrix} = Y_0$$

Tomamos $F(Y,t) = \begin{pmatrix} f_1(x,y,t) \\ f_2(x,y,t) \end{pmatrix}$

En resumen, obtenemos una ecuación de la forma

$$Y' = F(Y,t), \qquad Y(t_0) = Y_0$$

Muy semejante a una vieja conocida:

$$y' = f(y,t), \qquad y(t_0) = y_0$$

La cual aproximamos numéricamente mediante distintos algoritmos : P.ej. Euler

$$y_{i+1} = y_i + hf(y_i, t_i)$$

Extendiendo a sistemas de ecuaciones

$$Y_{i+1} = Y_i + hF(Y_i, t_i)$$

$$\begin{pmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}_i + h \begin{pmatrix} f_1(x_i, y_i, t_i) \\ f_2(x_i, y_i, t_i) \end{pmatrix}$$

En resumen:

$$x_{i+1} = x_i + hf_1(x_i, y_i, t_i)$$
$$y_{i+1} = y_i + hf_2(x_i, y_i, t_i)$$

Euler para sistemas

$$x' = x - 4y, \qquad y' = -x + y,$$
$$x(0) = 1, \qquad y(0) = 0,$$

$$f_1(x, y) = x - 4y,$$
$$f_2(x, y) = -x + y$$

$$x_{i+1} = x_i + hf_1\left(x_i, y_i, t_i\right) = x_i + h\left(x_i - 4y_i\right)$$
$$y_{i+1} = y_i + hf_2\left(x_i, y_i, t_i\right) = x_i + h\left(-x_i + y_i\right)$$

$$h = 0.2.$$

$$x_1 = 1 + (0.1)(1) = 1.1, \qquad y_1 = 0 + (0.1)(-1) = -0.1.$$

$$f_1(x_0, y_0) = 1 - (4)(0) = 1, \quad f_2(x_0, y_0) = -1 + 0 = -1.$$

$$x_2 = 1.1 + (0.1)(1.5) = 1.25, \qquad y_2 = -0.1 + (0.1)(-1.2) = -0.22.$$

$$f_1(x_1, y_1) = 1.1 - (4)(-0.1) = 1.5, \quad f_2(x_1, y_1) = -1.1 + (-0.1) = -1.2.$$

Punto Medio para Sistemas de Ecuaciones

Predicción

$$y_{i+\frac{1}{2}} = y_i + \frac{h}{2} f(y_i, t_i)$$

$$Y_{i+\frac{1}{2}} = Y_i + \frac{h}{2} F(Y_i, t_i)$$

$$\begin{pmatrix} x_{i+\frac{1}{2}} \\ y_{i+\frac{1}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} + \frac{h}{2} \begin{pmatrix} f_1(x_i, y_i, t_i) \\ f_2(x_i, y_i, t_i) \end{pmatrix}$$

$$x_{i+\frac{1}{2}} = x_i + \frac{h}{2} f_1(x_i, y_i, t_i)$$

$$y_{i+\frac{1}{2}} = y_i + \frac{h}{2} f_2(x_i, y_i, t_i)$$

Corrección

$$y_{i+1} = y_i + f(y_{i+\frac{1}{2}}, t_{i+\frac{1}{2}})h$$

$$Y_{i+1} = Y_i + f(Y_{i+\frac{1}{2}}, t_{i+\frac{1}{2}})h$$

$$\begin{pmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} + \frac{h}{2} \begin{pmatrix} f_1(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}}, t_i) \\ f_2(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}}, t_i) \end{pmatrix}$$

$$x_{i+1} = x_i + \frac{h}{2} f_1(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}}, t_i)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} f_2(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}}, t_i)$$

Dinámica de poblaciones: depredador-presa

$$\frac{dR}{dt} = 2R - 1.2RF$$

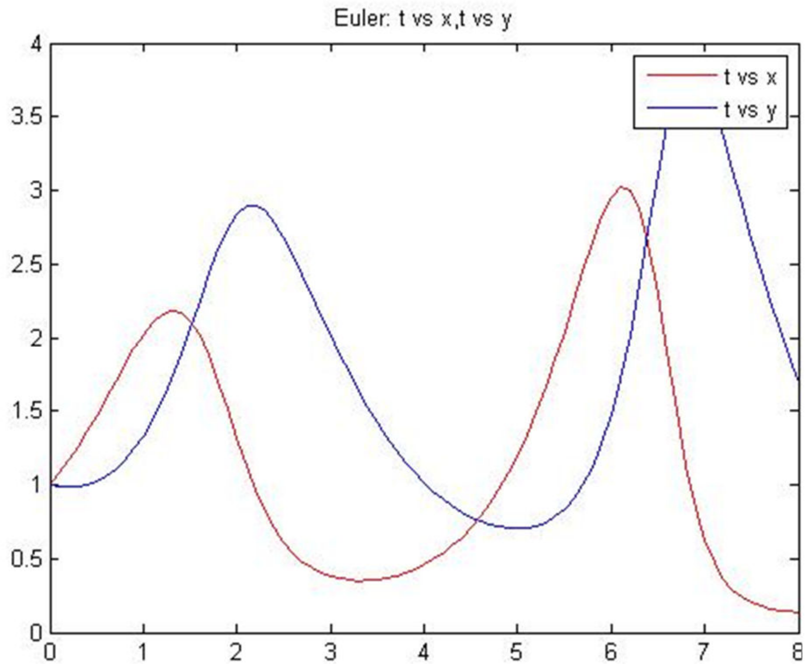
$$\frac{dF}{dt} = -F + 0.9RF,$$

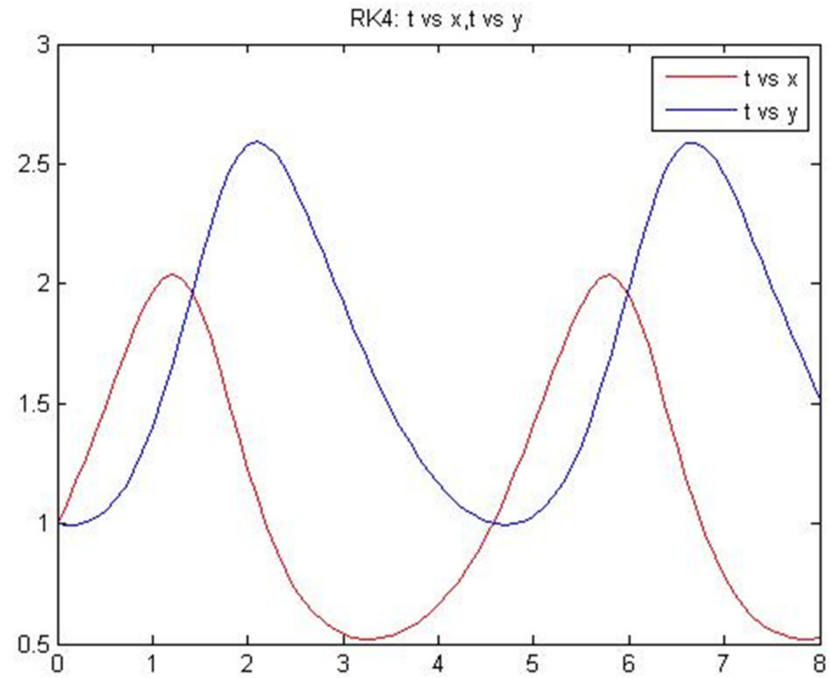
$$Y = \begin{pmatrix} R \\ F \end{pmatrix} \qquad Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

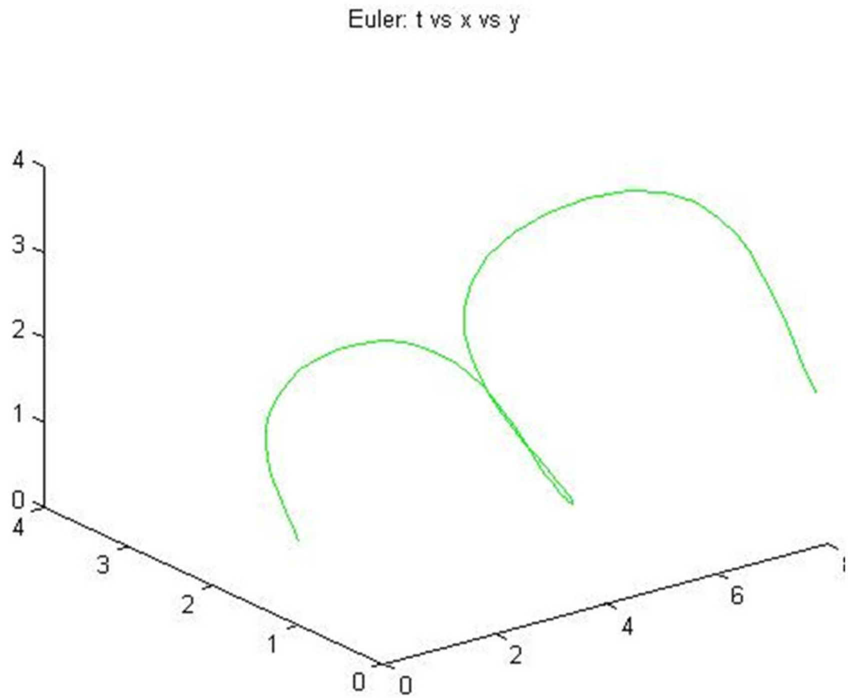
$$h = 0.1, \qquad n = 80$$

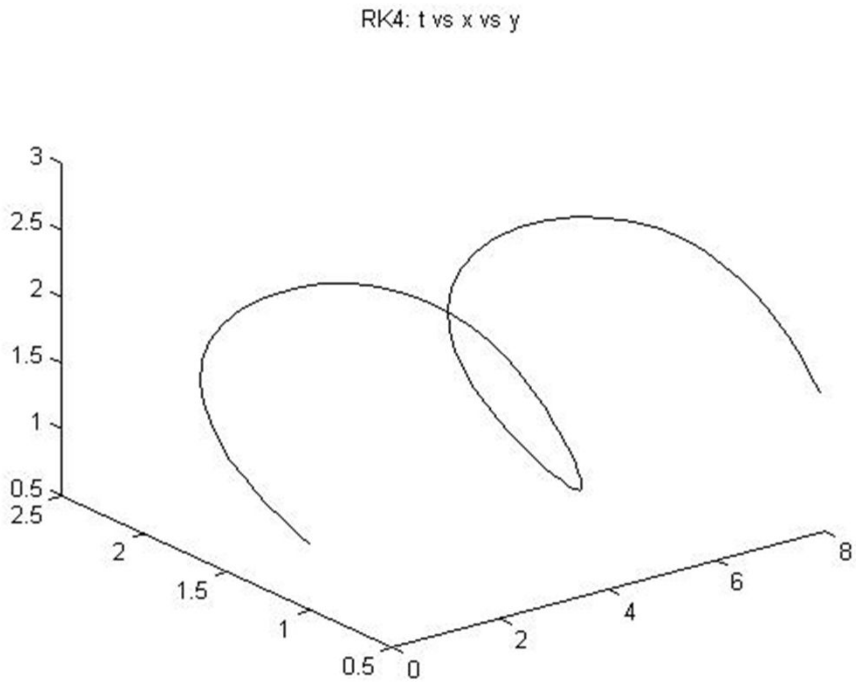
```
tinic=0.0, tfinal=8;
 xinic=1.0,yinic=1.0; n=80;
 f1=@(t,x,y) 2*x-1.2*x.*y;
f2=@(t,x,y) -y+0.9*x.*y;
 [t1,x1,y1]=RK4_plano_MM(f1,f2,tinic,xinic,yinic,tfinal,n);
[t2,x2,y2]=Euler_clasico_plano(f1,f2,tinic,xinic,yinic,tfinal,n);
 figure(1)
plot(t2,x2,'r',t2,y2,'b‘), legend('t vs x','t vs y')
title('t vs x,t vs y')
figure(2)
plot3(t2,x2,y2,'g'), title('t vs x vs y')
figure(3)
plot(x2,y2,'g'),title('x vx y')
figure(4)
plot(t1,x1,'r',t1,y1,'b'),legend('t vs x','t vs y')
title('t vs x,t vs y')
figure(5)
plot3(t1,x1,y1,'k‘), title('t vs x vs y')
figure(6)
plot(x1,y1,'k'), title('x vx y')
figure(7)
plot(x1,y1,'g',x2,y2,'k'), title('x vx y')
```

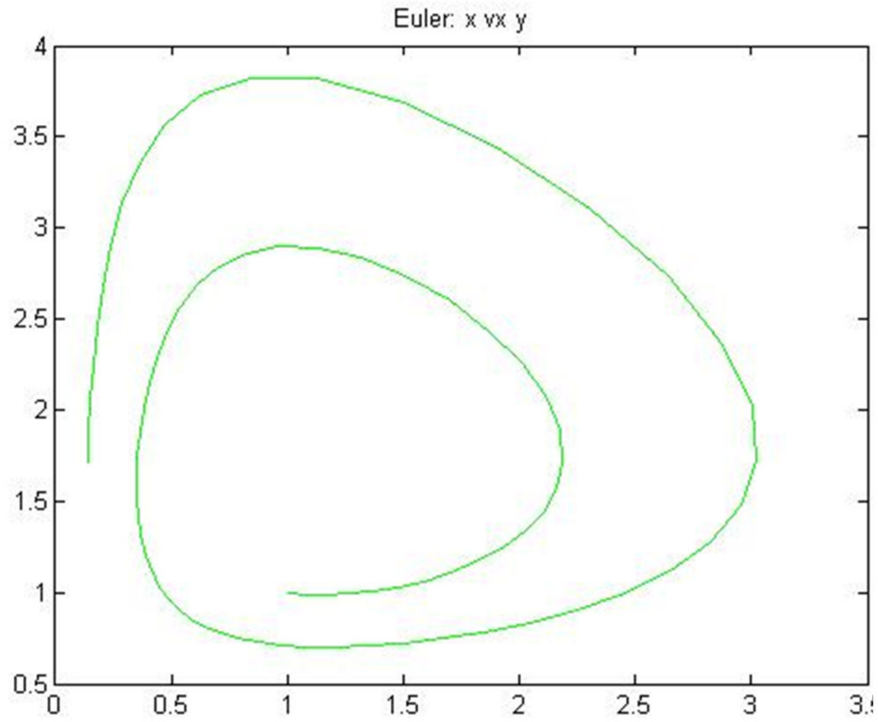
Rutina en Matlab para comparar los métodos de Euler simple y Runge-Kutta de orden 4

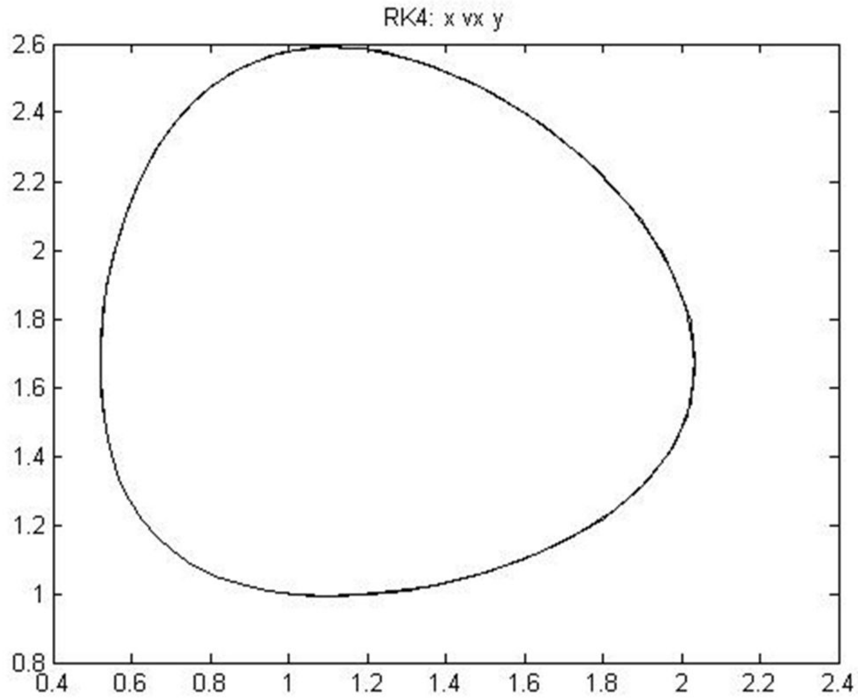

Euler: t vs x,t vs y
t vs x
t vs y
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
0
1
2
3
4
5
6
7
8

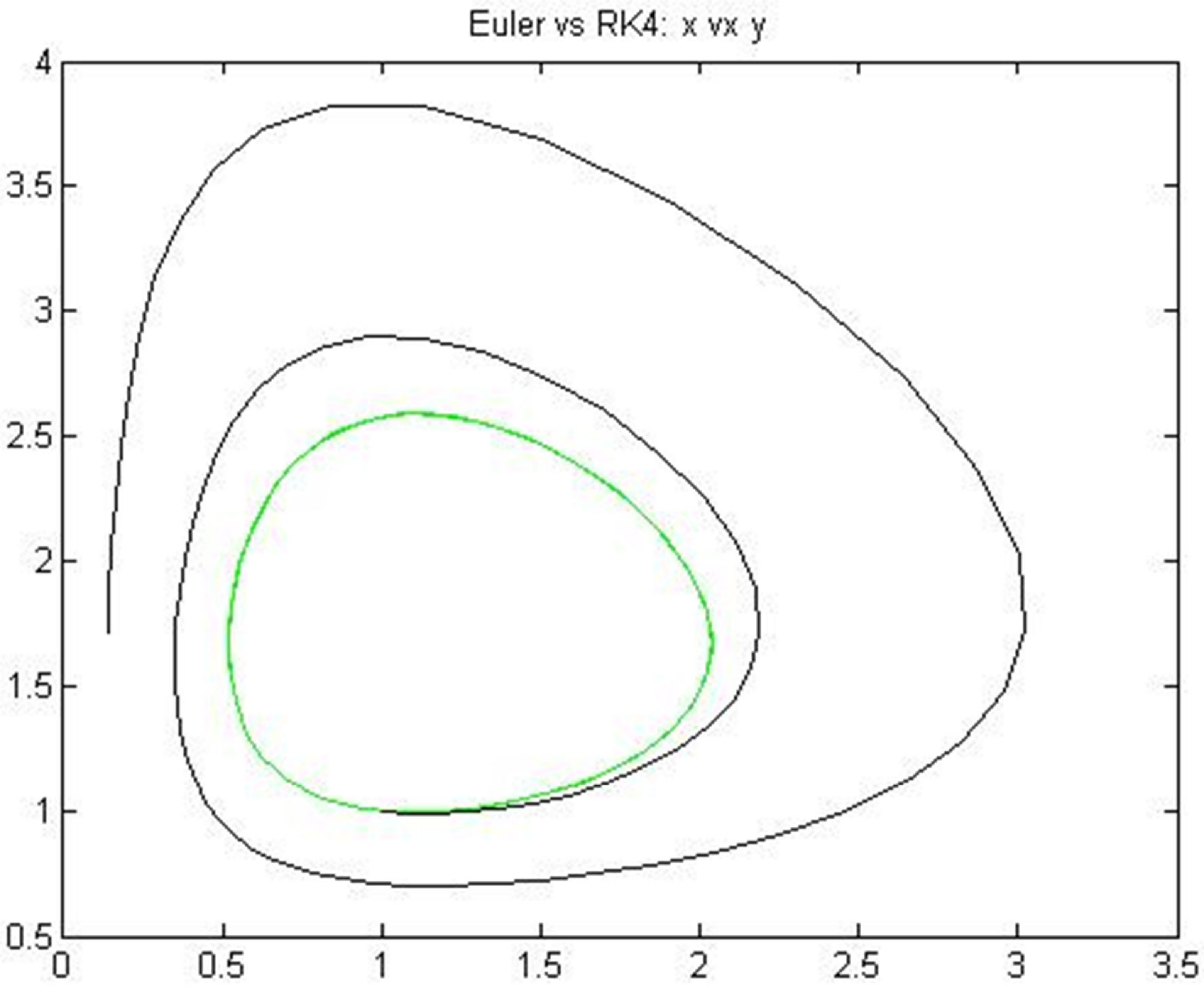

RK4: t vs x,t vs y
t vs x
t vs y
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
1
2
3
4
5
6
7
8


Euler: t vs x vs y
4
3
2
1
0
4
3
2
1
0
0
2
4
6


RK4: t vs x vs y
3
2.5
2
1.5
1
0.5
2.5
2
1.5
1
0.5
0
2
4
6
8


Euler: x vx y
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3


RK4: x vx y
2.6
2.4
2.2
2
1.8
1.6
1.4
1.2
1
0.8
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
2
2.2
2.4



Euler vs RK4: x vx y
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5

Tarea

Dar los esquemas iterativos para sistemas de dos ecuaciones diferenciales de primer orden para los métodos de

- Euler Mejorado
- Runge Kutta de orden 4
- Euler hacia atrás