Crecimiento y decamiento

1. La población de una comunidad aumenta a una tasa que es proporcional al número de personas presente en el tiempo t. Si una población inicial P_0 se ha duplicado en 5 años, ¿cuánto tardará en triplicarse?, ¿y en cuadruplicarse?
2. Se sabe que la población de la comunidad creciente del problema 1 es de 10 000 individuos después de 3 años. ¿Cuál era la población inicial P_0? ¿Cuál será la población en 10 años? ¿Con cuánta rapidez está creciendo la población en $t = 10$?
3. La población de cierta ciudad crece a una tasa que es proporcional a la población presente en el tiempo t. La población inicial de 500 individuos aumenta 15% en 10 años. ¿Cuál será la población en 30 años? ¿Con cuánta rapidez está creciendo la población en $t = 30$?
4. En cierto cultivo, la población de bacterias crece a una tasa que es proporcional a la cantidad de bacterias presentes en el tiempo t. Después de 3 horas, se observa que hay 400 bacterias; luego de 10 horas, 2 000. ¿Cuál fue el número inicial de bacterias?
5. El isótopo radiactivo del plomo, Pb-209, se deteriora a una tasa que es proporcional a la cantidad presente en el tiempo t y tiene vida media de 3.3 horas. Si un gramo de este isótopo está presente en un inicio, ¿cuánto tiempo le tomará descomponerse al 90% del plomo?
6. En un principio, estaban presentes 100 miligramos de cierta sustancia radiactiva. Después de 6 horas, la masa había disminuido en 3%. Si la tasa de decamiento es proporcional a la cantidad de sustancia presente en el tiempo t, encuentre la cantidad restante después de 24 horas.
7. Determine la vida media de la sustancia radiactiva descrita en el problema 6.
8. *a*) Considere el problema de valor inicial $dA/dt = kA$, $A(0) = A_0$, como el modelo del decamiento de una sustancia radiactiva. Muestre que, en general, la vida media T de la sustancia es $T = -(\ln 2)/k$.
   b) Muestre que la solución del problema de valor inicial dado en la parte *a*) se puede escribir como $A(t) = A_0 2^{-t/T}$.
   c) Si una sustancia radiactiva tiene la vida media T dada en la parte *a*), ¿cuánto le tomará a la cantidad inicial A_0 de la sustancia en decaer a $\frac{1}{8}A_0$?
9. Cuando un haz vertical de luz atraviesa un medio transparente, la tasa a la cual su intensidad I disminuye es proporcional a $I(t)$, donde t representa el espesor del medio (en pies). En agua marina clara, la intensidad a 3 pies por debajo de la superficie es el 25% de la intensidad inicial I_0 del haz incidente. ¿Cuál será la intensidad del haz a 15 pies por debajo de la superficie?
10. Cuando el interés se compone de manera continua, la cantidad de dinero aumenta a una tasa que es proporcional a la cantidad S presente en el tiempo t, es decir, $dS/dt = rS$, donde r es la tasa anual de interés.
    a) Encuentre la cantidad de dinero acumulado al final de 5 años cuando se depositen \$5 000 en una cuenta de ahorros que produzca $5\frac{3}{4}\%$ de interés anual compuesto de manera continua.
    b) ¿En cuántos años se habrá duplicado la suma inicial depositada?
    c) Utilice una calculadora para comparar la cantidad obtenida en la parte *a*) con la cantidad $S = 5000(1 + \frac{1}{4}(0.0575))^{5(4)}$ que se acumula cuando el interés se compone de manera trimestral.

Fechado por carbono

11. Los arqueólogos han utilizado piezas de madera quemada, o carbón, encontradas en el sitio para datar la antigüedad de pinturas prehistóricas y dibujos plasmados en las paredes y techos de una cueva localizada en Lascaux, Francia. Vea la figura 2.42. Use la información de la página 77 para determinar la edad aproximada de una pieza de madera quemada si se encontró que el 85.5% del C-14 acumulado en los árboles vivos del mismo tipo se había deteriorado.

Figura 2.42 Pintura en la pared de una cueva, problema 11

12. Muchas personas creen que el Sudario de Turín, que muestra la imagen negativa del cuerpo de un hombre aparentemente crucificado, fue el manto mortuorio de Jesús de Nazaret. Vea la figura 2.43. En 1988, el Vaticano concedió el permiso para que se investigara su antigüedad mediante el fechado por carbono. Tres laboratorios científicos independientes analizaron las telas y concluyeron que el sudario tenía aproximadamente 660 años de antigüedad,* una edad que concordaba con su aparición histórica. Con base en esta edad, determine cuál es el porcentaje de la cantidad original de C-14 que permanecía en la tela hasta 1988.

Figura 2.43 Imagen del sudario presentado en el problema 12

*Algunos académicos no están de acuerdo con este hallazgo. Para obtener más información acerca de este fascinante misterio, vea la página web del Sudario de Turín en http://www.shroud.com.

Ley de Newton sobre enfriamiento y calentamiento

13. Un termómetro se saca de una habitación donde la temperatura es de 70° F, y se lleva a un lugar donde la temperatura del aire es de 10° F. Después de medio minuto, el termómetro marca 50° F. ¿Cuál es la temperatura que marcará en $t = 1$ minuto? ¿Cuánto tiempo le llevará al termómetro alcanzar los 15° F?
14. Un termómetro se saca de una habitación donde la temperatura del aire es de 5° F. Después de un minuto el termómetro marca 55° F, y luego de 5 minutos marca 30° F. ¿Cuál es la temperatura inicial del interior de la habitación?
15. Una pequeña barra metálica, cuya temperatura inicial era de 20° C, se deja caer en un gran recipiente que contiene agua hirviendo. ¿Cuánto tiempo le llevará a la barra alcanzar los 90° C si se sabe que su temperatura aumentó 2° en un segundo? ¿Cuánto le llevará alcanzar los 98° C?
16. Dos grandes recipientes A y B del mismo tamaño se llenan con diferentes líquidos. Estos líquidos se mantienen a 0° C y 100° C, respectivamente. Una pequeña barra de metal con temperatura inicial de 100° C se introduce en el recipiente A. Después de un minuto, la temperatura de la barra es de 90° C; luego de 2 minutos la barra se saca y al instante se transfiere al otro recipiente. Pasado un minuto en el recipiente B, la temperatura de la barra se eleva en 10°. ¿Cuánto tiempo, desde el inicio de todo el proceso, le llevará a la barra alcanzar los 99.9° C?
17. Un termómetro que marca 70° F se coloca en un horno precalentado a temperatura constante. A través de una ventana de vidrio localizada en la puerta del horno, un observador registra que el termómetro marca 110° F después de $\frac{1}{2}$ minuto y 145° F luego de un minuto. ¿Cuál es la temperatura del horno?
18. En $t = 0$, una probeta sellada que contiene una sustancia química se sumerge en un baño líquido. En la probeta, la temperatura inicial de la sustancia es de 80° F. El baño líquido tiene una temperatura controlada (medida en grados Fahrenheit) dada por $T_m(t) = 100 - 40e^{-0.1t}$, $t \geq 0$, donde t se mide en minutos.
    a) Asuma que $k = -0.1$ en la expresión (2). Antes de resolver el PVI, describa con palabras qué espera que suceda con la temperatura $T(t)$ en el corto y el largo plazos.
    b) Resuelva el PVI. Use una herramienta graficadora para trazar la gráfica de $T(t)$ en intervalos de tiempo de diferente duración. ¿Las gráficas coinciden con sus predicciones de la parte *a*)?

Mezclas

19. Un tanque contiene 200 litros de fluido en el cual se han disuelto 30 gramos de sal. La salmuera, que contiene un gramo de sal por litro se bombea hacia el depósito a una velocidad de 4 L/min; perfectamente mezclada, la solución se bombea hacia fuera a la misma velocidad. Encuentre el número $A(t)$ de gramos de sal presentes en el tanque en el tiempo t.
20. Resuelva el problema 19 asumiendo que se bombea agua pura al tanque.
21. Un tanque grande se llena a toda su capacidad con 500 galones de agua pura. Hacia el tanque se bombea salmuera, conteniendo 2 libras de sal, a velocidad de 5 galones por minuto. Perfectamente mezclada, la solución se bombea hacia fuera a la misma velocidad. Encuentre la cantidad $A(t)$ de libras de sal presentes en el tanque en el tiempo t.
22. En el problema 21, ¿cuál es la concentración $c(t)$ de sal en el tanque en el tiempo t? ¿En $t = 5$ minutos? ¿Cuál es la concentración de sal en el tanque después de un largo tiempo, es decir cuando $t \to \infty$? ¿En qué tiempo la concentración de sal en el tanque es igual a la mitad de este valor límite?
23. Resuelva el problema 21 bajo el supuesto de que la solución se bombea hacia fuera a una mayor velocidad de 10 gal/min. ¿Cuándo se vacía el tanque?
24. En el ejemplo 5, determine la cantidad de sal presente en el tanque en el tiempo t si la concentración de sal en el flujo de salida es variable y está dada por $c_{entrada}(t) = 2 + \text{sen}(t/4)$ lb/gal. Sin graficar realmente, conjeture acerca de qué apariencia tendría la curva solución del PVI. Después use una herramienta graficadora para trazar la gráfica de la solución en el intervalo [0, 300]. Repita para el intervalo [0, 600] y compare su gráfica con la de la figura 2.38*a*).
25. Un tanque grande se llena parcialmente con 100 galones de fluido en los cuales están disueltas 10 libras de sal. Al tanque se bombea salmuera, conteniendo $\frac{1}{2}$ libra de sal por galón, a velocidad de 6 gal/min. La solución, perfectamente mezclada, se saca a la menor velocidad de 4 gal/min. Encuentre la cantidad de libras de sal presentes en el tanque después de 30 minutos.
26. En el ejemplo 5 no se da el tamaño del tanque que contiene la mezcla salina. Suponga, como en el análisis del ejemplo 5, que la velocidad a la cual se introduce la salmuera al tanque es de 3 gal/min, pero que la solución perfectamente mezclada se saca a una tasa de 2 gal/min. Es lógico pensar: como la salmuera se está acumulando en el tanque a velocidad de 1 gal/min, cualquier tanque finito debe saturarse eventualmente. Ahora suponga que el tanque tiene tapa abierta y una capacidad total de 400 galones.
    a) ¿En qué tiempo se derramará el líquido?
    b) ¿Cuántas libras de sal habrá en el tanque al instante del derrame?
    c) Suponga que aunque el líquido se está derramando, la solución de salmuera continúa entrando a velocidad de 3 galones por minuto y la solución perfectamente mezclada sigue saliendo a una tasa de 2 galones por minuto. Diseñe un método para determinar la cantidad de libras de sal presentes en el tanque en $t = 150$ minutos.
    d) Determine cuántas libras de sal hay en el tanque cuando $t \to \infty$. ¿Su respuesta concuerda con lo que usted había intuido?
    e) Use una herramienta de graficación para trazar la gráfica $A(t)$ en el intervalo [0, 500).